

KMA/G2 Geometrie 2

3.-4. cvičení

1. Afinity zobrazení eukleidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníka ABC na bod B , bod B na bod C a bod C na bod A . Může být toto zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic a určete samodružné prvky a typ tohoto zobrazení.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Existuje jen pro případ rovnostranného } \triangle ABC - \text{rotace:} \\ x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{array} \right\}$$

2. Určete parametry p, q tak, aby existovala shodnost eukleidovské roviny \mathbb{E}_2 , při které se zobrazí body $[3, 0], [1, 2], [-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4], [p, 2], [2, q]$.

$$\left\{ p = -1, q = 0 \right\}$$

3. Shodné zobrazení eukleidovské roviny do eukleidovského prostoru $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + bx_2 - 2, \\ x'_2 &= \frac{1}{2}x_2 + 1, \\ x'_3 &= ax_1 + cx_2 - 3. \end{aligned}$$

Určete koeficienty a, b, c .

$$\left\{ a = 0, b = 0, c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

4. Ověřte, že daná afinita eukleidovské roviny \mathbb{E}_2 je shodností. Určete samodružné body a směry této shodnosti o rovnicích

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + 1, \\ x'_2 &= \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - 2. \end{aligned}$$

$$\left\{ S\left[\frac{5}{2}, 0\right], \text{žádný samodružný směr} \right\}$$

5. Najděte inverzní zobrazení ke shodnosti.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3, \\ y' &= -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1. \end{aligned}$$

$$\left\{ x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{11}{5}, y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \right\}$$

6. Určete, zda je afinita eukleidovské roviny \mathbb{E}_2

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\ y' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{aligned}$$

přímou, či nepřímou shodností. Najděte její samodružné prvky.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{přímka samodružných bodů } 2x + 4y - 5 = 0; \text{ samodružné} \\ \text{směry } \vec{u}(2, -1); \vec{u}'(1, 2) \end{array} \right\}$$

7. Existují shodnosti, pro které jsou bod $[4, 0]$ a směry $(1, 1)$ a $(1, -1)$ samodružné? Napište jejich rovnice.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{identita: } x' = x, y' = y; \text{ středová souměrnost: } x' = -x + 8, \\ y' = -y \text{ a osové souměrnosti podle přímek } x + y - 4 = 0 \text{ a} \\ x - y - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

8. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}, \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

popisují shodnost v prostoru \mathbb{E}_3 . Najděte samodružné body a směry.

$$\{ [1, 0, 0]; (0, 1, 1) \}$$

9. Rovnice šroubového pohybu v \mathbb{E}_3 kolem osy z jsou

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z + a\varphi, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Zapište tyto rovnice v maticovém tvaru. Ukažte, že jde o shodné zobrazení a rozhodněte, zda je daná shodnost přímá, nebo nepřímá.

10. Pomocí násobení matic ukažte, že šroubový pohyb z předcházející úlohy lze složit z rotace kolem osy z a posunutí ve směru této osy.

11. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $2x - 3y + 1 = 0$.

$$\left\{ x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{4}{13}, y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{6}{13} \right\}$$

12. Napište rovnice souměrnosti podle roviny $x + 2y - z + 4 = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}, y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{8}{3}, \\ z' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}. \end{array} \right\}$$

13. Rovinná souměrnost zobrazuje bod $[1, 0, -2]$ na bod $[3, 2, 0]$. Určete její transformační rovnice.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}, y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}, \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3}. \end{array} \right\}$$

14. Napište rovnice souměrnosti podle přímky o parametrickém vyjádření $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{9}{11}x - \frac{2}{11}y + \frac{6}{11}z + \frac{24}{11}, y' = -\frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y - \frac{6}{11}z + \frac{42}{11}, \\ z' = \frac{6}{11}x - \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z + \frac{6}{11}. \end{array} \right\}$$

15. Určete typ shodnosti

- $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y;$
- $x' = -x - 6, y' = y;$
- $x' = -x + 1, y' = -y;$
- $x' = x + 3, y' = -y;$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) rotace se středem } S[\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}] \text{ o úhel } \varphi = +45^\circ; \text{ b) osová} \\ \text{souměrnost podle přímky } x + 3 = 0; \text{ c) středová souměrnost se} \\ \text{středem } S[\frac{1}{2}, 0]; \text{ d) posunutá souměrnost daná osou } o: x = 0 \text{ a} \\ \text{vektorem } \vec{t}(3, 0); \end{array} \right\}$

16. Napište rovnice
- středové souměrnosti se středem $S[2, -3]$ v rovině \mathcal{E}_2 ;
 - otočení se středem $S[-2, 1]$ o úhel $\varphi = \frac{\pi}{6}$ v rovině \mathcal{E}_2 ;
 - posunutí daného vektorem $\vec{u}(-1, 3, 2)$ v prostoru \mathcal{E}_3 .

17. Napište rovnice posunuté souměrnosti dané osou $2x - y + 1 = 0$ a vektorem $\vec{t}(2, 4)$.

$$\left\{ x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}, y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{22}{5}. \right\}$$

18. Najděte samodružné body shodnosti složené ze souměrnosti podle roviny $xx = 0$ a souměrnosti podle roviny $x - y + 2z - 1$.

19. Dokažte, že afinita v \mathbb{E}_2 určená maticí

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

je podobnost. Určete poměr této podobnosti.

$$\{ k = \sqrt{5} \}$$

20. Dokažte, že zobrazení eukleidovské roviny na sebe, které je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 5y - 1, \\ y' &= -5x + 2y + 4 \end{aligned}$$

je podobností. Určete jeho samodružné body a směry.

$$\left\{ \left[\frac{21}{26}, \frac{21}{26} \right], \text{žádný samodružný směr} \right\}$$

21. Zobrazení $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= 2x + ay, \\ y' &= x + by, \\ z' &= y. \end{aligned}$$

Určete koeficienty a, b tak, aby šlo o podobnost.

$$\left\{ a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, b = \mp \frac{4\sqrt{5}}{5} \right\}$$

22. Určete rovnice podobnosti, která zobrazuje bod $[1, 1]$ do počátku a počátek do bodu $[0, 2]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ řešení: } x' = -x + y, y' = -x - y + 2 \text{ a } x' = x - y, \\ y' = -x - y + 2 \end{array} \right\}$$

23. Určete všechny podobnosti v rovině, pro něž je bod $[1, 1]$ a směr $\langle(1, 1)\rangle$ samodružné.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + 1 - a, y' = ay + 1 - a, \\ x' = by + 1 - b, y' = bx + 1 - b \end{array} \right\}$$

24. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 5, \\ y' &= x + 2y - 1 \end{aligned}$$

popisují podobné zobrazení. Rozložte tuto podobnost na stejnoolehlost a shodnost. Určete typ získané shodnosti.

25. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y + 2z + 4 \\y' &= px + 2y + z - 2 \\z' &= qx + ry + 2z - 2\end{aligned}$$

určena podobnost. Najděte její samodružný bod a samodružné směry.

$$\{ p = 2, q = -2, r = 1; [0, 2, 0], (0, 1, 0) \}$$

26. Určete střed stejnolehlosti, která je složena ze stejnolehlosti

$$\mathcal{H}: \begin{aligned}x' &= 2x + 1, \\y' &= 2y - 1,\end{aligned}$$

a translace

$$\mathcal{T}: \begin{aligned}x' &= x + 3, \\y' &= y.\end{aligned}$$

$$\{ [-4, 1] \}$$

27. Napište rovnice stejnolehlosti se středem $S[-2, 1]$ a koeficientem $\kappa = 3$ v rovině \mathbb{E}_2 .

$$\{ x' = 3x + 4, y' = 3y - 2 \}$$