KMA/G2 Geometrie 2

6. a 7. cvičení

---

1. O následujících množinách bodů v $\mathbb{P}_2$ rozhodněte, zda jsou lineárně (ne)závislé: a) $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -1)$, $\mathbf{c} = (4, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 1, -2)$; b) $\mathbf{a} = (2, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -4)$, $\mathbf{c} = (0, 1, -6)$.

2. Ukažte, že body určené reprezentanty
$$\mathbf{a} = (2, 3, -2), \quad \mathbf{b} = (1, 2, -4), \quad \mathbf{c} = (0, 1, -6)$$
incidují s jednou přímkou. Určete λ a μ tak, aby
$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$$
Určete x_2 v trojici $(4, -1, x_2)$ tak, aby bod s tímto reprezentantem incidoval s přímkou $p = \mathbf{ab}$.

3. V $\mathbb{P}_3$ jsou dány body $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$. Dokažte, že leží na jedné přímce a vypočtěte bod D takový, že uspořádaná čtveřice (A, B, C, D) je harmonickou čtveřicí.

4. Ukažte, že body $\mathbf{r} = (1, 4, 1, 2)$, $\mathbf{s} = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{t} = (2, 3, -3, -1)$ prostoru $\mathbb{P}_3$ jsou kolineární. Na přímce $p = \mathbf{rs}$ najděte bod $\mathbf{v}$, pro který je $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{v}) = 4$.

5. V rovině $\overline{\mathbb{E}_2}$ je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Určete homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.

6. V rovině $\overline{\mathbb{E}_2}$ jsou dány body $\mathbf{a} = (0, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 8, 2)$. Napište obecnou rovnici přímky AB a určete její nevlastní bod.

7. V prostoru $\overline{\mathbb{E}_3}$ je přímka popsána v homogenních souřadnicích rovnicemi
$$\begin{aligned} 2x_0 + 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 7x_0 - 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$
Určete její nevlastní bod.

8. Napište rovnici roviny, která v prostoru $\mathbb{P}_3$ prochází body $\mathbf{a} = (2, -1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (3, 2, 2, -3)$.

9. V prostoru $\mathbb{P}_4$ najděte společný bod M nadrovin
$$\begin{aligned} x_0 - x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 10x_4 &= 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

10. Kolineace f na přímce $\mathbb{P}_1$ je určena páry odpovídajícch si bodů:
$$(1, 0) \mapsto (1, 4), \quad (2, 3) \mapsto (8, 5), \quad (0, 1) \mapsto (-2, 1).$$
Napište rovnice kolineace.

11. Kolineace f v rovině $\mathbb{P}_2$ je určena páry odpovídajícch si bodů:

$$(2,0,1) \mapsto (1,3,-2), \quad (1,1,2) \mapsto (1,3,-1), \quad (0,2,3) \mapsto (1,9,-4), \quad (1,0,0) \mapsto (1,2,-2).$$

Napište rovnice kolineace a určete souřadnice bodů B' a C, jestliže

$$\mathbf{b} = \mathbf{c}' = (1,1,1).$$

12. Najděte vyjádření involuce $f:\ \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, ve které je obrazem bodu $\mathbf{a} = (1,2)$ bod $\mathbf{a}' = (1,0)$ a obrazem bodu $\mathbf{b} = (2,3)$ je bod $\mathbf{b}' = (8,1)$

13. Popište rovnicemi kolineaci $f:\ \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, pro kterou jsou dány následující vzory a obrazy: $(1,1,1) \mapsto (-1,1,1)$, $(-1,1,1) \mapsto (1,1,-1)$, $(1,1,-1) \mapsto (1,-1,1)$, $(1,-1,1) \mapsto (1,1,1)$. Ukažte, že f je *cyklická kolineace čtvrtého stupně* (tj. platí $f^4 = f \circ f \circ f \circ f = id$).

14. Projektivní zobrazení $f:\ \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ je dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x_0' &= 2x_0 - x_2 + x_3 \\ x_1' &= -x_0 + x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= 3x_0 + 2x_1 - 3x_3 \end{aligned}$$

a) Rozhodněte, zda jde o regulární projektivní zobrazení (projektivitu)?
b) Najděte obraz bodu $\mathbf{a} = (2,1,-3,0) \in \mathbb{P}_3$.
c) Najděte vzor bodu $\mathbf{b}' = (-1,2,0,-1) \in \mathbb{P}_3'$.
d) Najděte obraz roviny α, jestliže $\mathbf{n}_\alpha = (2,-1,0,1) \subset \mathbb{P}_3$.

15. Kolineace $f:\ \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_0' &= 3x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x_1' &= 2x_0 - x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= -2x_0 + x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

a) Sestavte charakteristický determinant a najděte charakteristickou rovnici kolineace.
b) Určete všechny charakteristické hodnoty kolineace.
c) Najděte samodružné body a samodružné přímky kolineace.

16. Kolineace $f:\ \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_0' &= 2x_0 \\ x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= 3x_3 \end{aligned}$$

a) Určete kořeny charakteristické rovnice a jejich násobnost.
b) Pro každý kořen ϱ určete hodnost matice $(\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E})$.
c) Pro každý kořen ϱ najděte všechny samodružné body a samodružné nadroviny k němu příslušné.

17. Kolineace $f:\ \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_0' &= x_1 + x_2 \\ x_1' &= x_0 + x_2 \\ x_2' &= x_0 + x_1 \end{aligned}$$

a) Najděte samodružné body a samodružné přímky kolineace.
b) Popište incidenci mezi všemi samodružnými body a samodružnými přímkami.