VÝŠKY A OSY STRAN V TROJÚHELNÍKU

Zbyněk Šír

Mnoho geometrických úloh se týká význačných přímek a bodů v trojúhelníku. Takovou úlohou je i 70-A-I-2 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

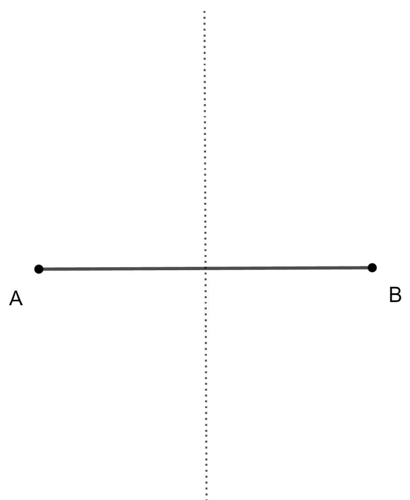
V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD||AB$ a $FE||AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.

V tomto příspěvku se pokusíme čtenáře motivovat k možnému synthetickému i analytickému řešení této úlohy. Naším východiskem budou přitom především různé důkazy známé poučky o společném průsečíku výšek v trojúhelníku.

1 Osy stran

Pojmem, který je možno nejsnadněji uchopit, je *osa strany*. Následující popis je triviální, ale užitečný a zajímavý z hlediska budování matematiky.

Definice 1.1. *Osa úsečky AB je přímka, která prochází jejím středem a je na ni kolmá.*



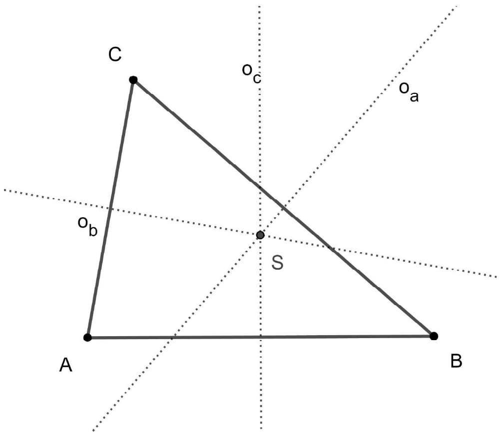
Je velice zajímavé, že tento pojem využívající v podstatě jen kolmosti nám přímo popíše významnou množinu bodů.

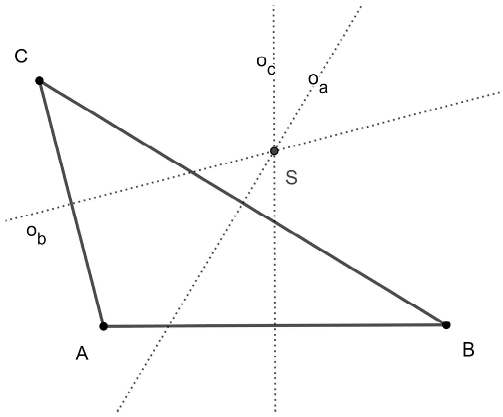
Lémma 1.2. *Mějme dány dva různé body A a B. Pro libovolný bod C platí, že je od obou stejně vzdálen, tedy $|AC| = |BC|$, právě tehdy, když leží na ose úsečky AB.*

Zdůrazněme, že tvrzení má tvar ekvivalence, což se může v různých úlohách hodit. Jinými slovy, osa úsečky je právě ta množina bodů, které mají stejnou vzdálenost.

Toto jednoduché lémmátko nebudeme formálně dokazovat. Bylo by to možné z některých jednoduchých vět v Eukleidových *Základech*, pomocí Pýthagorovy věty či analyticky. Ve skutečnosti ale toto tvrzení, které dává do souvislosti kolmost a rovnost vzdáleností, patří do samých základů a východisek geometrie. Mohlo by být považováno za zjevný postulát.

Věta 1.3. *V libovolném trojúhelníku ABC se osy stran AB, BC a CA protínají právě v jednom bodě.*



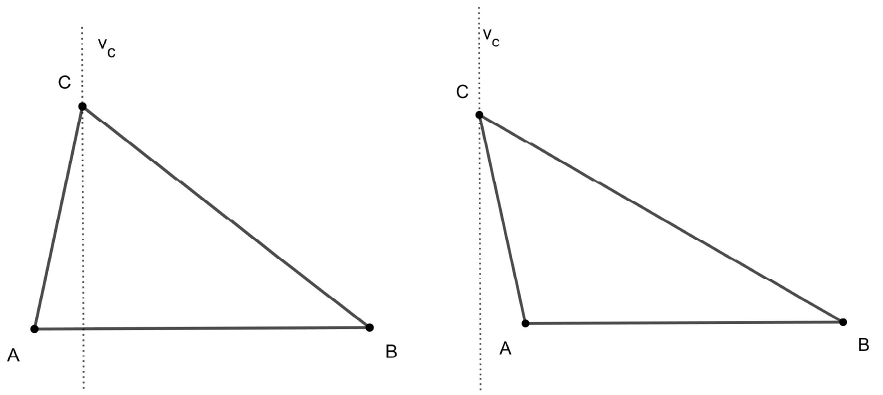


Důkaz. Osy o_a a o_b nemohou být rovnoběžné (protože v trojúhelníku nejsou rovnoběžné úsečky BC a CA), a proto se protnou v bodě, který označíme S. Protože $S \in o_a$ platí $|BS| = |CS|$. Protože $S \in o_b$ platí $|AS| = |CS|$. V důsledku tedy i $|AS| = |BS|$ a tedy $S \in o_c$. □

2 Výšky

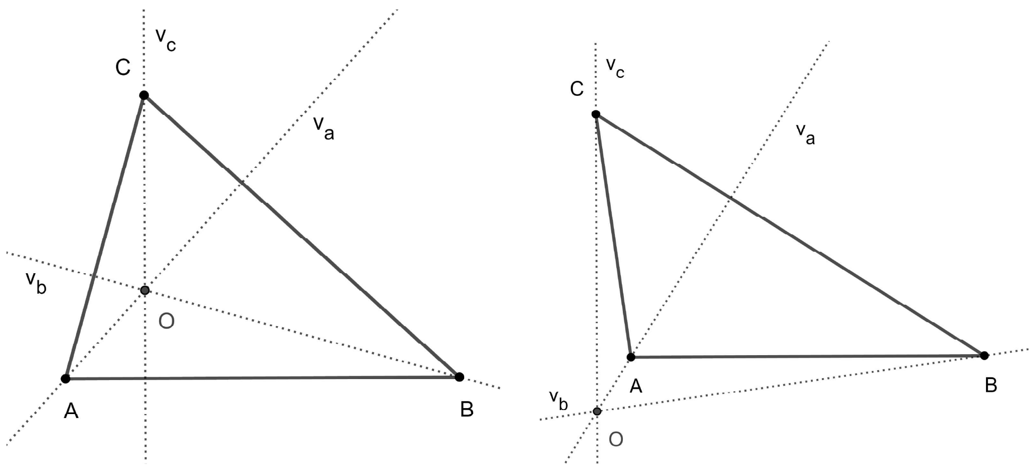
Nyní pokročíme k poněkud obtížnějšímu pojmu výšky.

Definice 2.1. *Výška v trojúhelníku je přímka vedená libovolným ze tří vrcholů a kolmá na protilehlou stranu. Trojúhelník má tedy vždy tři výšky.*

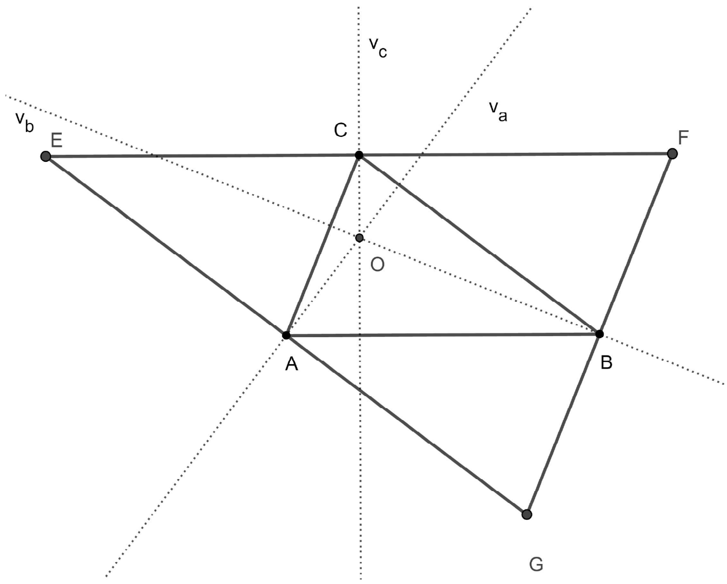


Pokud má někdo ze čtenářů to štěstí, že důkaz následujícího tvrzení nikdy neviděl, velice doporučuji pokusit se důkaz samostatně vymyslet. Ukazuje se, že bez znalosti jistého triku nebo bez použití analytických výpočtů to není jednoduché. My si však ukážeme dva důkazy, které se právě o uvedené prostředky opírají. Děláme to zejména proto, že jsou vhodnou motivací k podobným řešením soutěžní úlohy.

Věta 2.2. *V libovolném trojúhelníku ABC se tři výšky protínají právě v jednom bodě.*



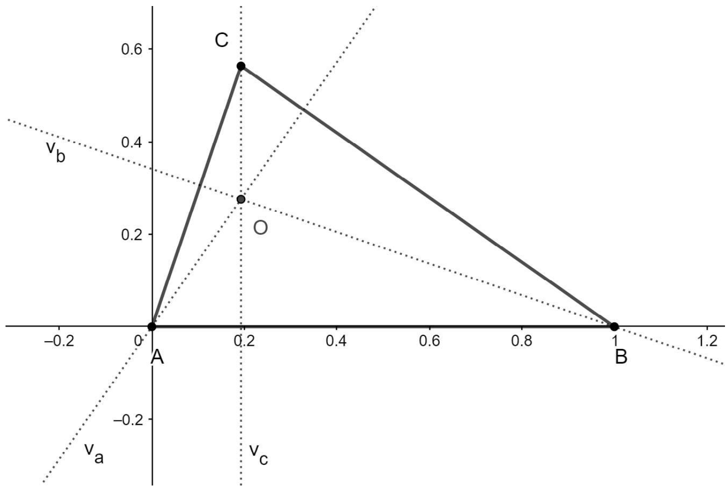
Důkaz. První důkaz je čistě synthetický. Každým vrcholem vedeme rovnoběžku s protější stranou (tedy kolmici na výšku). Tyto tři nové přímky jsou vzájemně různoběžné a protnou se v bodech nového trojúhelníku FEG.



Výšky původního trojúhelníku ABC jsou osami stran nového trojúhelníku FEG a proto se protínají v jednom bodě podle Věty 1.3.

Druhý důkaz je čistě analytický. Je přitom důležité dobře si promyslet, kolik vstupních parametrů budeme používat. Na první pohled jich je 6, totiž x-ové a y-ové souřadnice bodů $A[a_x, a_y]$, $B[b_x, b_y]$, $C[c_x, c_y]$. S jejich pomocí bychom si mohli vyjádřit rovnice výšek, a pak ukázat, že se protnou v jednou bodě.

Ve skutečnosti ale můžeme trojúhleník posunout a otočit tak, že bod A je v počátku, tedy $a_x = a_y = 0$, a navíc bod B leží na kladné části osy x, tedy $b_x > 0$ a $b_y = 0$. To bychom odborně nazvali nezávislostí (invariancí) dokazované věty vůči shodnostem. Navíc se vlastnost zachová, když trojúhelník zvětšíme nebo zmenšíme (nezávislost na podobnostech). Proto můžeme volit $b_x = 1$.



Celkově tedy můžeme předpokládat polohu bodů $A[0,0]$, $B[1,0]$ a $C[c_x,c_y]$, pracujeme tedy jen se dvěma parametry. Obecná rovnice v_c je zřejmě $x=c_x$. Směrový vektor výšky v_b musí být kolmý na vektor $\overrightarrow{AC}=(c_x,c_y)$ a tedy je to například vektor $(-c_y,c_x)$. Tím získáme parametrické vyjádření přímky v_b

$$v_b:\quad x=1-t\,c_y,\quad y=0+t\,c_x,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Pro průsečík s v_c musí tedy platit $c_x=1-t\,c_y$ čímž dostáváme $t=\frac{1-c_x}{c_y}$ (c_y je totiž nenulové, jinak by se nejednalo o trojúhelník), a tedy pro průsečík dvou výšek platí

$$O=v_c\cap v_b=\left[c_x,\frac{c_x-c_x^2}{c_y}\right].$$

K tomu, abychom ukázali, že i třetí výška v_a prochází bodem O postačí, že vektory $\overrightarrow{AO}$ a $\overrightarrow{BC}$ jsou kolmé. To však snadno ověříme skalárním součinem, protože

$$\overrightarrow{AO}=\left(c_x,\frac{c_x-c_x^2}{c_y}\right),\quad \overrightarrow{BC}=(c_x-1,c_y).$$

□

3 Dvě úlohy na závěr

Náš příspěvek zakončíme dvěma úlohami k samostatnému řešení.

Úloha 3.1. *Mějme trojúhelník ABC s výškami v_a, v_b a v_c a jejich patami P_a, P_b a P_c. Dokažte, že v_a, v_b a v_c jsou osami úhlů trojúhelníku $P_aP_bP_c$.*

Úloha 3.2. *Mějme trojúhelník ABC s výškami v_a, v_b a v_c a jejich průsečíkem O. Nechť X je bod osově souměrně sdružený s O podle přímky AB a Y středově souměrně sdružený s O podle středu strany AB. Dokažte, že X i Y leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.*

Literatura

[AG] M. Kočandrle, L. Boček: *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*, Prometheus 2009.

[EG] E. Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, American Mathematical Society, 2016.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`