

Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných středoškoláků II: Polynomy

Karel Pazourek a Zbyněk Šír

Abstrakt

Tento příspěvek navazuje na náš první článek v tomto sborníku a je věnován našim zkušenostem s online výukou matematiky v druhé části kurzu *Matematické algoritmy a jejich geometrické interpretace* pořádaného v rámci projektu Talnet.

V krátkosti zmíníme matematický obsah kurzu i strukturu jeho lekcí.

Provedeme srovnání možností vzdělávání nadaných studentů v rámci online výuky a korespondenčních seminářů.

1 Úvod

Projekt Talnet od roku 2003 vzdělává nadané děti (zejména ve věku 14–18 let) v přírodních vědách, a to kombinovanou formou: Během roku probíhají internetové kurzy, ve kterých studenti řeší úkoly a debatují nad problémy, posléze vytvářejí seminární práce, které před spolužáky a instruktory obhajují. Následuje soustředění, během kterého studenti své práce prezentují i před účastníky jiných kurzů Talnetu. Vše doplňují exkurze a prosemináře (např. o historických osobnostech vědy).

První, podzimní část kurzu *Matematické algoritmy a jejich geometrické interpretace* se zabývala přeměnou rovinných útvarů na čtverec, její průběh je shrnut v článku [5].

Druhá část kurzu se zabývala polynomy, hledáním kořenů polynomů a jejich použitím v geometrii – interpolacemi. Téma polynomů, polynomiálních rovnic a polynomiálních křivek je ve středoškolské matematice probíráno jen ve velmi omezené míře. Teorii polynomů však lze studentům nadaným v matematice dobře přiblížit.

2 Matematický obsah a struktura kurzu

Jarní část matematického kurzu Talnetu sestávala ze sedmi lekcí. Každé z prvních šesti lekcí byl věnován jeden týden, během něhož studenti studovali učební materiály a plnili úkoly. Sedmá lekce byla přidána jako pomůcka při vypracovávání seminárních prací.

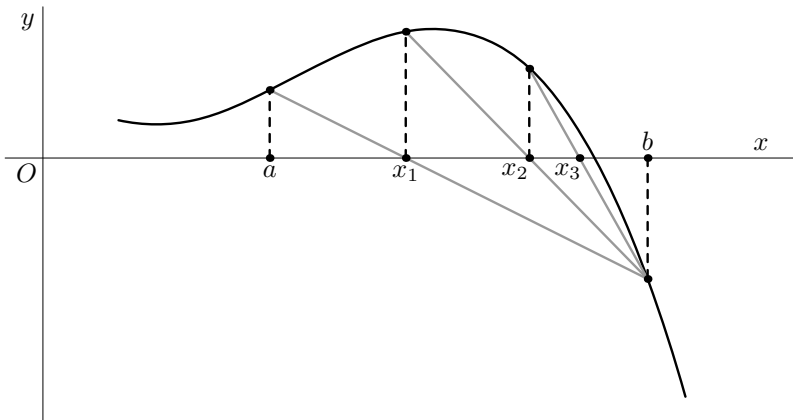
2.1 Polynomy, kořeny a iterační metody

Polynomy jakožto matematické objekty mají široké uplatnění jak v abstraktní, tak v aplikované matematice. V kurzu jsme se zaměřili především na hledání kořenů a na aplikace.

Nejprve jsme zavedli pojem polynomu, osvětlili základní termíny (např. stupeň polynomu) a následně zavedli tři operací na množině polynomů: sčítání, odčítání a násobení; k tomu přibyly pojmy derivace a (neurčitého a určitého) integrálu, ovšem byly zavedeny pouze jako operace, teoretický přístup nebyl v rámci kurzu z rozsahových důvodů možný, ostatně to ani nebylo cílem kurzu. Dělení polynomů úzce souvisí s kořeny polynomů: Pokud číslo a je kořenem polynomu $P(x)$, pak při dělení $P(x) : (x - a)$ nedostaneme žádný zbytek. Stejně tak kořeny polynomu $P(x)$ je vhodné chápat nejen jako průsečíky grafu příslušné polynomiální funkce, ale i jako řešení polynomiální rovnice $P(x) = 0$.

Tento přístup umožňuje výklad algebraických i iteračních metod hledání kořenů. Kromě vzorců pro výpočet kořenů kvadratické rovnice nebo Viětových vztahů se pracovalo s Descartesovým znaménkovým pravidlem, Hornerovým schématem a Eukleidovým algoritmem.

Iterační metody pak ukázaly výhody přibližného určení kořene a jejich využití. Věnovali jsme se metodám půlení (bisekce), sečen a Newtonově metodě, která pracuje s derivací. Stejně tak hledání počtu kořenů na daných intervalech pomocí Sturmových posloupností využívá derivace, nikoliv však její geometrický aspekt; student tak nebyl omezen na jedinou představu o funkci derivace v matematice.



Obrázek 1 Příklad metody sečen

Další didakticky zajímavou aplikací polynomů jsou polynomiální interpolace (nahrazování složité křivky polynomiální křivkou), zaměřili jsme se na Lagrangeovu a Hermitovu interpolaci. Díky jejich širokému uplatnění při zpra-

covávání dat je možné nalézt celou řadu příkladů a úloh, které lze přizpůsobit možnostem a nárokům jednotlivých studentů. Interpolace se také často objevovali v zadáních seminárních prací.

2.2 Struktura kurzu

Kurz byl postaven tak, aby umožnil se zapojit studentům s co nejširší mírou nadání a znalostí. Zopakovaly se základní pojmy, doplňovaly se a upevňovaly vědomosti nabyté ve školním vyučování. Dále byly jednotlivé metody a problémy zařazeny do historických souvislostí.

Přítom úroveň znalostí studentů umožňuje "pouze" algoritmický přístup k tématu, hlubší studium by vyžadovalo další přípravu, která je nad časové možnosti kurzu, a nad (současné) schopnosti většiny studentů. Získané vědomosti je především motivují pro další studium. Navíc studenti dokáží použít iterační a interpolační algoritmy v dalších situacích.

Témata byla do lekcí rozdělena následovně:

1. lekce	Polynomy - základní pojmy. Sčítání, odčítání a násobení polynomů. Derivování a integrování polynomů.
2. lekce	Kořeny polynomů. Dělení polynomů.
3. lekce	Polynomiální funkce. Kvadratická funkce a její graf.
4. lekce	Descartesovo znaménkové pravidlo. Hornerovo schéma. Euklidův algoritmus.
5. lekce	Iterační metody. Metoda bisekce. Metoda sečen.
6. lekce	Derivace v algoritmech: Newtonova iterační metoda, Sturmovy posloupnosti.
7. lekce (doplňující)	Polynomiální interpolace: Lagrangeova a Hermitova interpolace.

Sedmá lekce, jak už bylo zmíněno, měla ulehčit studentům shánění materiálů o interpolacích při vytváření seminárních prací.

3 Analýza a pozorování

3.1 Problém zdůvodňování

Během celého kurzu byl kladen důraz na vyjadřovací schopnosti studentů: Často se stávalo, že studenti necítili potřebu své výsledky odůvodňovat nebo vysvětlovat, přitom jim to bylo opakovaně připomínáno. Je možné, že to způsobila nízká počítačová gramotnost - studenti vnímají on-line prostředí jako mezikrok od psaného projevu (kde jsou zvyklí zdůvodňovat) a přímého kontaktu (kde je zdůvodňování od nich vyžadováno až doplňující otázkou, popřípadě zdůvodnění chápou jako dovysvětlení postupu, tedy ne jako nezbytnou složku řešení úlohy).

3.2 Hledání a vyhodnocování informací

Dalším problematickým místem, které souvisí s počítačovou gramotností, byla práce s informacemi získanými na Internetu.

Ukázala se u studentů značná neochota (nebo nevědomost) ověřovat si informace z více zdrojů. Mnozí studenti si vystačili s jediným zdrojem informací (obvykle portál Wikipedia), někteří pracovali pouze s texty psanými v češtině.

3.3 Korespondenční seminář vs. online výuka

Využití matematických algoritmů je v rámci korespondenčního semináře omezené. Například v úlohách Pikomatu MFF UK, se kterým autor spolupracuje a který je zaměřen na žáky druhého stupně základních škol a nižšího gymnázia, algoritmické myšlení se v úlohách často nevyskytuje. Je zde několik příčin:

- Jednotlivé úlohy jsou předkládány pomocí jednoduchých zadání. Přitom úlohy o algoritmech často vyžadují větší přípravu nebo obsáhlejší vysvětlování.
- Algoritmy nejsou tradičním tématem, se kterým se v korespondenčních seminářích pracuje. Ostatně ani ve školské výuce se téměř s algoritmy cíleně npracuje.
- Chybí možnost vrátit řešení k dopracování: Analýza algoritmu nebo jeho konstrukce je náročná na logické myšlení a formulování myšlenek. Málokterí (nadaní) studenti jsou schopni uvést dostatečně úplné řešení. Zkušenosti z online výuky ukazují, že vypracovat složitější algoritmické úlohy do požadovaného stavu je pro studenty velmi obtížné, i při četných konzultacích s instruktorem a dostatku času.

3.4 Seminární práce

4 Závěr

Projekt Talnet umožňuje vzdělávat se velkému spektru nadaných studentů a studentů se zájmem (nejen) o matematiku. Algoritmické postupy přitom plní několik cílů:

- Procvičuje se logické, zejména algoritmické myšlení.
- Oblasti matematiky, které by jinými prostředky pro jejich náročnost nešlo vyučovat, jsou zde představovány na úrovni znalostí studentů. Procvičované postupy lze pak uplatnit v běžné praxi; dále při vhodném výkladu motivují studenty k dalšímu vzdělávání v dané oblasti.
- Algoritmy utřídí uží získané vědomosti do jednoho celku. Jeho procvičováním jsou pak dílčí znalosti procvičovány.

- Pokud se studenti podílí na tvorbě algoritmu, nutně musí uvažovat o matematických principech, na kterých je řešení daného problému založeno. Je však třeba pečlivě volit míru vzhledu do problematiky přiměřené ke schopnostem studentů a dalším podmínkám (časové omezení, dostupnost studijních materiálů atd.).

Z uvedených faktů vyplývá, že zásadním bodem při používání algoritmického myšlení ve výuce matematiky je komunikace mezi učitelem a studentem, možnost přepracovat a doplnit řešení úloh, stejně tak volba náročnosti problémů. Student se však při jedné aktivitě učí nové poznatky nebo nabyté poznatky utřídí, zdokonaluje logické a zvláště algoritmické myšlení.

Reference

- [1] CYR, S. Can Distance Learning Meet the Needs of Gifted Elementary Math Students? *Gifted Child Today*. 2004, 27. ročník, 2. číslo, s. 43–51.
- [2] FURNER, J., HOBEIN, M., SCULLION, K. Taking an Internet field trip. *Tech Trends* 200, 44. ročník, 6. číslo, s. 18–22.
- [3] FONIOK, J., PAWLAS, Z., PAZOUREK, K. *Pikomati MFF UK: 2003–2004; ročenka 19. ročníku*. 1. vyd., Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2004.
- [4] ZHOUF, J., a kol. *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. 1. vyd., Praha: Prometheus, 2006.
- [5] ŠÍR, Z., PAZOUREK, K. Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných středoškoláků I: Polynomy. In tento sborník.