UŽITÍ TEORIE PROPORCÍ U EUKLEIDA, ARCHIMÉDA A APOLLÓNIA

ZBYNĚK ŠÍR

1 Úvod

Řecká teorie proporcí patří k nejpozoruhodnějším výdobytkům antického matematického myšlení. Její objev je připisován Eudoxovi z Knidu[1] (1. pol. 4. stol. p. n. l.), rozpracována a doložena je však především v V. knize Eukleidových *Základů*. Po mnoho století tato teorie fascinuje další a další generace matematiků svoji hloubkou a propracovaností.

Zřejmě nejpozoruhodnějším rysem teorie proporcí je její univerzálnost. Nejenže ji lze použít na veličiny libovolného druhu, ale rovněž je schopna popsat jak racionální tak i iracionální poměry veličin. Z hlediska současné matematiky pak oprávněně zaujme především její podobnost s moderní definicí reálných čísel.[2] V našem příspěvku se chceme zaměřit na jiný a poněkud opomíjený aspekt teorie proporcí, totiž na její roli jako základního prostředku a jazyka určeného pro formulaci a důkaz matematických výsledků.

V našem příspěvku nejprve připomeneme místo teorie proporcí ve struktuře Eukleidova spisu, a rovněž naznačíme hlavní rysy této teorie. Poté se budeme věnovat užití teorie proporcí v šesté knize *Základů* a dále u Archiméda ze Syrakůs a Apollonia z Pergy.

2 Teorie proporcí a její místo v Eukleidových *Základech*

Mezi třinácti autentickými knihami *Základů* nalézáme několik pasáží, které v jistém smyslu vybočují z celkového uspořádání. Samotný název *Základy* (στοιχεῖα) je odvozen od slov (στοιχεῖον), (στοῖχος), která v řečtině označují opracovaný blok kamene, vojáka stojícího v řadě, hlásku abecedy, obecně tedy člen doplňující posloupnost. Je rovněž užíván k označení čtyř živlů. Vžitý český překlad *Základy* je tedy poněkud zavádějící a je třeba mu rozumět ve smyslu *Základní prvky*. Má se pak jednat o základní prvky geometrie a aritmetiky. Rovinné geometrii jsou však věnovány knihy I–IV a VI, prostorové geometrii knihy XI–XIII a aritmetice knihy VII–IX. Zbývající knihy V a X jsou, stejně jako tzv. společné pojmy, věnovány obecné nauce o veličinách.[3]

2.1 Společné pojmy

Společné pojmy (κοιναὶ ἔννοιαι), jsou zařazeny na počátku první knihy a mají zcela obecný charakter. Jako příklad připomeňme první z nich *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*[4] Aristoteles společné pojmy, které nazývá rovněž „axiomy“ či „společné úsudky“, považuje za o sobě jisté a nedokazatelné principy společné mnoha vědám. Jako příklad výslovně udává třetí z Eukleidových obecných pojmů: *Jestliže se od stejně velkých věcí odejmou stejně velké věci, pak se zbytky rovnají.* Tyto principy se podle

---

[1] Diskusi objevu teorie proporcí z hlediska dochovaných pramenů lze nalézt v [2], díl 2, str. 508.

[2] Viz např. [3], str. 20.

[3] O knize X toto tvrzení platí jen částečně: ve své podstatě se zabývá především souměřitelností a nesouměřitelností obecných veličin, ale obsahuje i výsledky o konkrétních geometrických a aritmetických veličinách.

[4] Cituji dle [1]. Originál ovšem doslovně zní: *Co se rovná témuž, rovná se i navzájem.* Užití významově silně zatíženého termínu „veličina“, který se v originále objevuje až v V. knize, je z překladatelského hlediska na tomto místě nepřípustné a kvalitní cizojazyčné překlady se mu vyhýbají – viz např. [2], [6].

Aristotela aplikují na každou vědu analogicky. Tak například ony „stejně velké věci“ nebudou tytéž v aritmetice a v geometrii.[5]

2.2 V. kniha *Základů*

V. kniha pokračuje v podobně obecném duchu. Jejími hlavními pojmy jsou: veličina (μεγέθος), poměr (λόγος) a úměra (ἀναλογία).[6] Podobně jako ostatní základní termíny není (a nemůže být) pojem *veličina* v *Základech* definován. Pojem *poměr* sice definován je, ale pouze jako vágní poukaz: *Poměr je jakýsi vztah* (ποια σχέσις) *dvou sourodých veličin podle jejich velikosti* (κατὰ πηλικότητά). Uchopitelná a následně v důkazech užitá je až definice totožnosti poměrů. Pomocí celých čísel jsou v ní poměry uspořádány s jemností, která odpovídá modernímu zavedení reálných čísel. Podle této definice rovnost poměrů A : B = C : D nastane, jestliže pro libovolná celá čísla m, n nastává mezi násobky mA a nB současně týž vztah nerovnosti či rovnosti jako mezi násobky mC a nD. Tato definice je matematicky velice hluboká a charakterizuje libovolný (i iracionální) poměr jeho postavením vůči poměrům celočíselným.[7] Zdůrazněme, že zatímco veličina A musí být stejného druhu jako B a veličina C stejného druhu jako D, naprosto není nutné, aby veličiny A, B byly stejného druhu jako C, D. Postačí, aby bylo možno znásobovat veličiny (přirozeným číslem) a porovnávat veličiny stejného druhu mezi sebou.[8]

Pro účely tohoto článku se z celého dalšího bohatého obsahu páté knihy omezíme pouze na základní technické manipulace s poměry a jejich rovnostmi, které jsou shrnuty v následující tabulce:

Mějme dánu rovnost poměrů A : B = C : D			
Pak platí rovnost	**Řecký termín**	**Latinský termín**	**Český překlad**
A : C = B : D	’Εναλλὰξ	Alternado	Střídavě
B : A = D : C	’Ανάπαλιν	Invertendo	Převráceně
(A + B) : B = (C + D) : C	Σύνθεσις	Componendo	Součtově
(A – B) : B = (C – D) : C	Διαίρεσις	Separando	Rozdílově
A : (A – B) = C : (C – D)	’Αναστροφή	Convertendo	Obráceně

Jestliže je dána rovnost poměrů A : B = C : D, pak platí i rovnost dána střídavě, převráceně atd. (viz první sloupeček tabulky). Poměr, který nacházíme na levé straně rovnosti, se pak nazývá střídavým, převráceným atd. Názvy poměrů jsou zavedeny v definicích 12–15 a příslušné rovnosti poměrů jsou dokázány ve větách 16–19 páté knihy.

Abychom plně docenili význam uvedených rovností a řeckých i latinských termínů, je třeba si uvědomit, že až do 17. století se pro geometrii neužíval symbolický zápis. Vše bylo zapisováno slovním vyjádřením. Aby bylo možno sledovat řetězec odvozovaných

[5] Srv. Aristotelés, *Druhé analytiky*, 76b 11–16, viz [8].

[6] Z latinského *proportio*, kterým je překládáno řecké ἀναλογία pak vznikl i ustálený název *teorie proporcí.*

[7] Předpokládáme, že čtenáře s touto klíčovou definicí a jejím matematickým významem obeznámen. Matematický rozbor lze nalézt kupříkladu v [3], str. 20. či v [4], díl I, str. 385. V těchto publikacích, nebo pochopitelně přímo v [1], je rovněž možno se seznámit s celkovým obsahem V. knihy *Základů*.

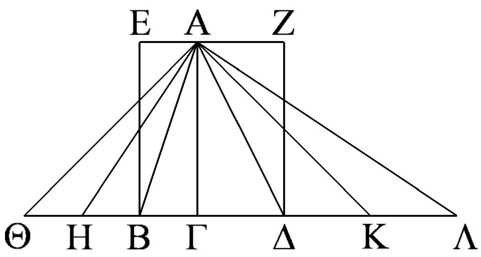
[8] Navíc Eukleidés postuluje tvz. Archimédův axiom, totiž aby se veličiny stejného druhu při znásobování vzájemně přesahovaly – tedy nepřipouští zde veličiny nekonečně malé.

rovností, bylo nezbytné mít standardizované „úpravy” rovností. Užitím termínu například „střídavě” se tedy autor odkázal nejen na všeobecně známý obrat, ale i přímo na příslušnou definici a větu *Základů* Jak zmiňuje Leibniz, ještě v 17. století matematici znali Eukleidovo dílo tak dobře, že pro každé číslo věty ihned věděli její obsah. V současné době bychom příslušné klíčové slovo nejspíše nahradili jednoduchým „po úpravě”. Díky zběhlosti v úpravách výrazů by pak bylo jasné, jaká úprava vlastně byla provedena.[9]

3 Ukázky užití teorie proporcí

3.1 První věta šesté knihy *Základů*

Hned v první větě šesté knihy Eukleidés užívá definice rovnosti poměrů. Snadnost důkazu je třeba přičítat právě geniálnosti definice. Znění této věty je následující:

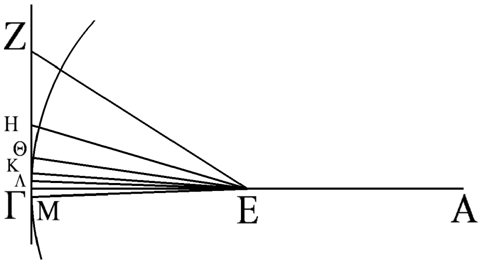


Trojúhelníky a rovnoběžníky s touž výškou se k sobě navzájem mají jako jejich základny. Mějme trojúhelníky ABΓ a AΓΔ a rovnoběžníky EΓ a ΓZ s touž výškou AΓ; tvrdím, že jako se má základna BΓ k základně ΓΔ, má se i trojúhelník ABΓ k trojúhelníku AΓΔ a rovnoběžník EΓ k rovnoběžníku ΓZ.

Při důkazu (zmíníme pouze případ trojúhelníků) Eukleidés užívá dříve dokázaného výsledku, že trojúhelníky se stejně velkou základnou a výškou mají stejný obsah. Nalevo od bodu Γ nanese libovolný počet (dnes bychom řekli m, obrázek znázorňuje situaci pro $m = 3$) úseček o délce BΓ. Stejně tak napravo nanese n-krát ΓΔ. Pro délky vzniklých úseček a obsahy trojúhelníků é úsečky a trojúhelníky pak zjevně platí $\Theta\Gamma = m\mathrm{B}\Gamma$, $\Theta\Gamma\mathrm{A} = m\mathrm{B}\Gamma\mathrm{A}$, $\Gamma\Lambda = n\Gamma\Delta$ a $\Gamma\Lambda\mathrm{A} = n\Gamma\Delta\mathrm{A}$. Ihned tedy získáváme ekvivalence $(m\mathrm{B}\Gamma <>= n\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (m\mathrm{B}\Gamma\mathrm{A} <>= n\Gamma\Delta\mathrm{A})$. Tím je tedy splněna definice pro $\mathrm{B}\Gamma : \Gamma\Delta = \mathrm{B}\Gamma\mathrm{A} : \Gamma\Delta\mathrm{A}$.

3.2 Ukázka z Archimédova spisu *Měření kruhu*

Třetí věta Archimédova spisu je zcela zásadní pro celkový výsledek odhad čísla π. Na samém počátku odvození vidíme samozřejmost s jakou Archimédés užívá technických obratů.



Mějme kruh o průměru AΓ, středu E, ΓΛZ nechť je tečnou a úhel ZEΓ nechť je třetinou pravého. EZ je tedy k ZΓ v poměru jako 306 : 153. EΓ je k ΓZ v poměru větším než 265 : 153. Rozdělme úhel ZEΓ napůl úsečkou EH. Poměr ZH k HΓ je tedy týž jako ZE k EΓ[10] a rovněž střídavě a součtově. Takže ZE se dohromady s EΓ má k ZΓ stejně jako EΓ k ΓH. Takže poměr ΓE k ΓH je větší než poměr 571 : 153.

[9] V tomto kontextu je vhodné zdůraznit, že procvičování tzv. „úprav výrazů“, jemuž je věnována část výuky matematiky na základní a střední škole, je naprosto nezbytné – vytváří nutnou oporu matematického myšlení. Můžeme být jen vděčni, že máme k dispozici elegantní algebraický kalkulus a nemusíme trávit dlouhý čas zapisováním a úpravami slovních obratů.

[10] Zde Archimédés užívá vlastnost klíčovou pro svůj postup: Osa úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru délek obou stran svírajících tento úhel. To je dokázáno v *Základech* – věta VI,3.

V tomto případě se tak z rovnosti poměrů $ZH : H\Gamma = ZE : E\Gamma$ nejprve „součtově“ dovozuje rovnost $(ZH + H\Gamma) : H\Gamma = (ZE + E\Gamma) : E\Gamma$ a posléze „střídavě“ $(ZE + E\Gamma) : (ZH + H\Gamma) = E\Gamma : H\Gamma$. Protože ale $ZH + H\Gamma = Z\Gamma$, dostáváme výslednou rovnost $(ZE + E\Gamma) : Z\Gamma = E\Gamma : H\Gamma$. Protože ale $ZE : Z\Gamma = 306 : 153$ a $E\Gamma : Z\Gamma > 265 : 153$ dostáváme, že $E\Gamma : H\Gamma > 571 : 153$, jak je uvedeno v textu.

3.3 Teorie proporcí v Apollóniových *Kuželosečkách*

Užití aparátu teorie proporcí u Apollónia nejlépe demonstrujeme tím, že do tištěné verze našeho příspěvku žádnou ukázku nezařadíme. Ve své práci *Kuželosečky* Apollónios odvozuje v prostoru základní vlastnosti kužele, které pak v osmi knihách svého spisu rozvíjí především úvahami rovinnými. Prostorový charakter kuželoseček spolu s faktem, že se jedná o křivky popsané kvadratickou vlastností, vede nezbytně k velmi bohatému a složitému užití teorie proporcí, které není možno zachytit v tomto článku. Spokojme se s konstatováním, že teorie kuželoseček byla v jazyce proporcí studována od Apollónia až do konce 17. století. Posledním z monumentální svazků přeplněných obraty náležejícími do světa teorie proporcí bylo zřejmě dílo Philippa de La Hire *Sectiones conicae* [5].

4 Závěr

V našem krátkém příspěvku jsme se nejprve věnovali výjimečnému postavení, které má kniha V v rámci *Základů*. S určitou nadsázkou by se dalo říci, že spolu se Společnými pojmy by mohla tvořit samostatné dílo.

Pokusili jsme se rovněž obrátit pozornost na úlohu teorie proporcí jako jazyka a nástroje matematické práce. V tomto světle získávají poněkud nudné a zdlouhavé pasáže páté knihy Eukleidových *Základů* nový význam. Zároveň tak chceme upozornit na prospěšnost četby významných matematických pasáží v doslovném překladu. Tímto způsobem je možno dospět k porozuměním, která by zůstala ztracena při převodu autorova postupu do moderního symbolického zápisu.

Literatura

[1] *Eukleidovy základy*, př. F. Servít, Praha, 1907, 314 stran.

[2] *Les Eléments*, př. a kom. B. Vitrac, díly I–IV, Paris, 1990–2001.

[3] Bečvář J.: *Hrdinský věk řecké matematiky II*, in Bečvář, B., Fuchs, E.: Historie matematiky II, Prometheus, Praha, 1997.

[4] Heath T. L.: *A History of Greek Mathematics*, díly I-II, Oxford, 1921.

[5] La Hire Ph.: *Sectiones conicae in novem libros distributae*, Paris, 1685.

[6] *The Elements*, př. a kom. T. L. Heath, díly I–III, New York, 1956.

[7] Zeuthen H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Copenhagen, 1886.

[8] Aristotelés: *Druhé analytiky*, př. Antonín Kříž, Praha, 1962.

Adresa

RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *zbynek.sir@mff.cuni.cz*