O PROJEKCÍCH

Zbyněk Šír

Těžko bychom hledali užitečnější geometrická zobrazení než jakými jsou středová promítání a ostatní projekce. Jejich význam pro aplikace jakými jsou kupříkladu panoramatické lepení fotografií, získávání údajů z fotografií, orientace v rovině a v prostoru, umělé vidění či robotika je obrovský, viz např. [Mul]. O jejich významu v kontextu dějin matematiky i univerzálního vědění se krátce zmíníme v závěru článku.

V našem příspěvku se pokusíme naznačit způsob, jak toto důležité téma přiblížit žákům, a jak ho propojit s běžným učivem, zejména s teorií funkcí a analytickou geometrií.

1 Projekce jako interpolační funkce

V této sekci nejprve na jedné úloze ukážeme, že lineární lomené funkce jsou velmi vhodné k interpolaci tří zadaných hodnot.

Úloha 1.1. *Nalezněte prostou, spojitou, diferencovatelnou, rostoucí funkci f, která zobrazuje interval $\langle 0,1\rangle$ na sebe a splňuje $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{5}$.*

Ideálně bychom chtěli, aby funkce i funkce k ní inverzní měly libovolně vysokou derivaci (taková funkce se nazývá difeomorfismus). Funkce f tedy musí splňovat

$$f(0)=0, \qquad f(\frac{1}{2})=\frac{1}{5}, \qquad f(1)=1. \tag{1.1}$$

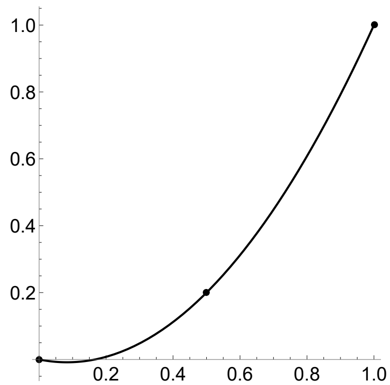
Přirozeným řešením by bylo předpokládat, že funkce f je kvadratická a má tedy tvar

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Rovnice (1.1) mají v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} c &= 0\\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c &= \frac{1}{5}\\ a+b+c &= 1 \end{aligned}$$

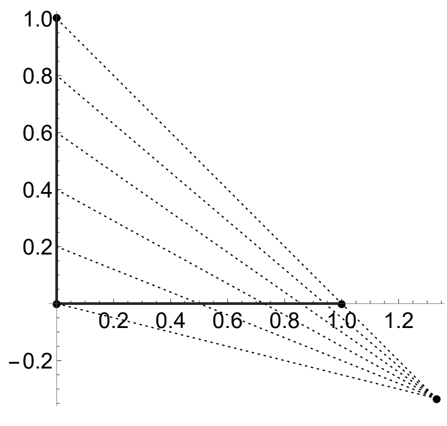
a jejich řešení $a=\frac{6}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$, $c=0$ vede k funkci $f(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{1}{5}x$.



Výpočet derivace $f'(x) = \frac{1}{5}(12x - 1)$ potvrzuje vizuální dojem: funkce je klesající na intervalu $(0, \frac{1}{12})$ a rostoucí na intervalu $(\frac{1}{12}, 1)$, a tedy nesplňuje zadání úlohy.

Nepochybujeme o tom, že čtenář by dokázal najít řadu funkcí, které zadání splňují. Nicméně nám dovolte předložit obecný princip interpolace pomocí lineárních lomených funkcí.

Pokusme se nalézt takový bod v rovině, aby středová projekce z tohoto bodu zobrazovala úsečku $[0,0],[1,0]$ na úsečku $[0,0],[0,1]$ tak, jak je naznačeno na následujícím obrázku.



Tento bod zjevně musí ležet na přímce spojující body $[0,1]$ a $[1,0]$, tedy na přímce p s obecnou rovnicí $x+y-1=0$. Vzhledem k zadání úlohy se pokusíme tento bod zvolit tak, aby se v projekci bod $[\frac{1}{2}, 0]$ zobrazil na bod $[0, \frac{1}{5}]$. Střed projekce tedy musí ležet i na přímce q s parametrickým vyjádřením

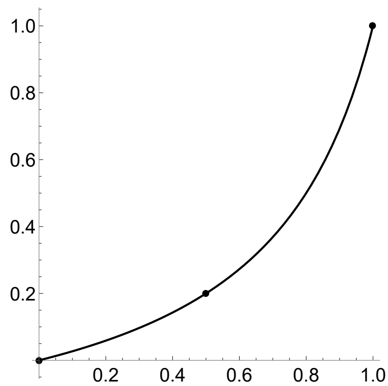
$$[x, y] = \left[\frac{1}{2}, 0\right] + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right).$$

Dosazením tohoto parametrického vyjádření do rovnice pro p vypočítáme $t = \frac{5}{3}$, a tedy střed projekce jako $S = [\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}]$.

Nyní se zobrazení definované jako projekce osy x na osu y se středem $S = [\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}]$ pokusíme vyjádřit analyticky. Bod $A = [x, 0]$ se zobrazí na bod $B = [0, y]$ a my chceme vyjádřit y v závislosti na x. Bylo by možno vyjádřit parametricky přímku spojující body AS a spočítat jejich průsečík s osou y. Použijeme však rychlejší postup založený na tom, že v rovině platí, že tři body leží na jedné přímce právě tehdy, když je nulový determinant matice 3×3 sestavené ze souřadnic bodů a jednoho sloupce $(1, 1, 1)^T$. V našem případě tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(3xy + x - 4y) = 0,$$

a tedy $y = \frac{x}{-3x+4}$, což je předpis funkce řešící naši úlohu



$$f(x) = \frac{x}{-3x + 4}. \tag{1.2}$$

Vskutku, jedná se o lineární lomenou funkci, která je hladká a rostoucí mimo bod $x = \frac{4}{3}$, který však leží mimo definiční obor $[0, 1]$.

2 Lomené lineární funkce

V této části budeme obecně studovat lomené lineární funkce, tedy funkce tvaru

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad ad - bc \neq 0, \tag{2.1}$$

kde a, b, c, d jsou reálné parametry. Podmínka $ad - bc \neq 0$ je nezbytná, aby funkce $f(x)$ nebyla konstantní. Vskutku, v opačném případě je možné čitatele a jmenovatele vydělit beze zbytku. Je snadné se přesvědčit, že složení dvou funkcí tvaru (2.1) má opět stejný tvar. Uvědomme si rovněž, že hodnoty parametrů λa, λb, λc, λd odpovídají stejné funkci, neboť λ se zkrátí.

Lomené funkce tvaru (2.1) nejsou ve středoškolské matematice příliš oblíbené kvůli problematické hodnotě nulového jmenovatele $x = -\frac{d}{c}$, viz např. [Fce]. Při pečlivějším pohledu však vidíme, že pro definiční obor a obor hodnot platí

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad H_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\},$$

a funkce f je na těchto množinách bijektivní. Protože navíc platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a}{c}, \qquad \lim_{x\to-\frac{d}{c}\pm} f(x) = \pm\infty,$$

existuje formálně precizní způsob, jak definovat množinu $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, kde ∞ reprezentuje obě limitní hodnoty $\pm\infty$. Po dodefinování $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ a $f(\infty) = \frac{a}{c}$ je f hladkou bijekcí $\bar{\mathbb{R}}$ na sebe, a v tomto smyslu tedy dokonalou funkcí.

Předchozí přístup je však příliš vzdálen od středoškolské matematiky, a proto budeme postupovat odlišně. Budeme studovat ty funkce tvaru (2.1), které (podobně jako funkce (1.2)) jsou rostoucí a zobrazují interval $[0,1]$ na sebe. Z podmínky $f(0) = 0$ dostáváme $b = 0$, což vynucuje $a \neq 0$, a díky vynásobení vhodnou hodnotou λ můžeme předpokládat, že $a = 1$. Poté podmínka $f(1) = 1$ znamená, že $c + d = 1$, a můžeme tedy volit $c = 1 - d$ a celkově dostáváme funkce tvaru

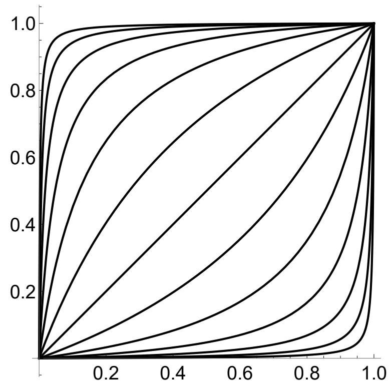
$$f_d(x) = \frac{x}{(1-d)x + d}.$$

Zbývá ještě vyšetřit, pro které hodnoty d je problematická hodnota $x = -\frac{d}{1-d}$ mimo interval $[0,1]$. Je snadné spočítat, že tato podmínka je splněna právě pro $d \in (0,\infty)$. Funkce (1.2) odpovídá volbě $d = 4$.

Věta 2.1. *Funkce*

$$f_d(x) = \frac{x}{(1-d)x + d}, \qquad d \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty),$$

jsou rostoucí difeomorfismy intervalu $[0,1]$ *na sebe. Navíc tyto funkce tvoří grupu vzhledem ke skládání funkcí. Pro libovolné hodnoty* $x_0, y_0 \in (0,1)$ *existuje právě jedno* $d \in \mathbb{R}_+$ *takové, že* $f_d(x_0) = y_0$.



Funkce f_d pro několik hodnot parametru d.

Důkaz. Jak jsme již poznamenali, hodnota, pro kterou je jmenovatel f_d nulový, je $x = -\frac{d}{1-d}$ a leží mimo interval $[0, 1]$. Protože se jedná o složení hladkých (elementárních) funkcí, je výsledná f_d rovněž hladká na $[0, 1]$. Její derivace je

$$f_d'(x) = \frac{d}{[(1-d)x + d]^2},$$

z čehož plyne, že f_d je rostoucí na $[0, 1]$.

Složením funkcí dostáváme $f_{d_1} \circ f_{d_2} = f_{d_1 d_2}$, a tedy f_1 je identické zobrazení a $f_d^{-1} = f_{\frac{1}{d}}$. Jinými slovy přiřazení $d \mapsto f_d$ je isomorfismus multiplikativní grupy $\mathbb{R}_+$ a grupy funkcí f_d spolu s operací složení.

Konečně interpolační podmínka $f_d(x_0) = y_0$ odpovídá rovnosti

$$\frac{x_0}{(1-d)x_0 + d} = y_0,$$

která je při předpokladu $x_0, y_0 \in (0, 1)$ ekvivalentní s vyjádřením

$$d = \frac{x_0(1-y_0)}{y_0(1-x_0)},$$

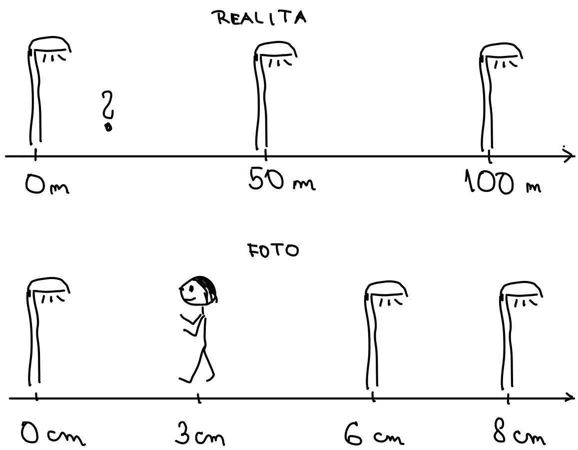
kterážto hodnota leží v $\mathbb{R}_+$. $\square$

3 Určení vzdálenosti objektů na fotografii

Mezi velkým množstvím úloh, při kterých lze využít analytický popis projekcí, si vybíráme jednu poměrně jednoduchou, a přitom velice důležitou z praktického hlediska.

Úloha 3.1. *Na fotografii rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to* 50 *metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp* 6 *centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy* 2 *centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?*

Jestliže v realitě i na fotografii umístíme první lampu do počátku souřadnic, můžeme si situaci popsanou v zadání úlohy graficky znázornit následujícím způsobem.



Poučeni předchozími úvahami předpokládáme, že projekce z reality na fotografii má tvar lineárního lomeného zobrazení. Totéž platí i o inverzním zobrazení, které si označíme

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

a které tedy musí splňovat podmínky $f(0) = 0$, $f(6) = 50$ a $f(8) = 100$. Odpovídající systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ 6a+b &= 50(6c+d) \\ 8a+b &= 100(8c+d) \end{aligned}$$

má řešení $a = 50$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 12$, které je jednoznačné až na násobek libovolným reálným číslem. Funkce f je tedy dána jednoznačně jako

$$f(x) = \frac{50x}{-x+12},$$

a získáváme tedy reálnou souřadnici chodce, která je zároveň jeho vzdáleností od první lampy, $f(3) = \frac{150}{9} \approx 16.67$. $\square$

Bylo by škoda nezmínit alespoň bez důkazu ještě jeden velmi efektivní postup, jak tuto úlohu vyřešit. Zajisté jsme si již povšimli, že středové projekce (na rozdíl od rovnoběžného promítání) nezachovávají poměry délek. Jestliže si lampy označíme L_1, L_2, L_3 a chodce C, potom například poměr délek úseček $\frac{|L_1L_2|}{|L_2L_3|}$ není stejný v realitě (kde je roven 1) a na fotografii (kde je roven 3). Z teorie projektivní geometrie však plyne, že komplikovanější výraz nazývaný *dvojpoměr* čtyř bodů se při projekcích nemění. Například výraz

$$\frac{\frac{|L_1C|}{|CL_3|}}{\frac{|L_1L_2|}{|L_2L_3|}} = \frac{|L_1C||L_2L_3|}{|CL_3||L_1L_2|}$$

musí tedy mít stejnou hodnotu na fotografii i v realitě. Na fotografii má přitom hodnotu $\frac{1}{5}$ a v realitě $\frac{|L_1C|}{100-|L_1C|}$, z čehož můžeme vypočítat stejnou hodnotu, jakou jsme získali předchozí metodou $|L_1C| \approx 16.67$.

4 Závěr aneb chvála projekcí

Cílem tohoto textu bylo přiblížit čtenáři teoretický i praktický význam studia projekcí. Nemohli jsme přitom ovšem ani zdaleka postihnout celou šíři jejich aplikací [Mul], ani souvislosti s dalšími partiemi matematiky.

Zmiňme na tomto místě, že projekce a projektivní geometrie hrály zcela zásadní roli v dějinách studia kuželoseček, které lze zajisté chápat jako projekce kružnice z jedné roviny do druhé [Bro]. Mají i hlubokou souvislost s konformní a algebraickou geometrií.

Nasnadě je význam projektivních zobrazení pro veškeré zobrazovací metody, renesanční perspektivou počínaje a deskriptivní geometrií a počítačovou grafikou konče. [Děj]

Konečně se zdá, že projekce hrají roli jakéhosi archetypálního způsobu fungování lidského poznání. Vskutku, nalezneme je kupříkladu v Platónově podobenství o jeskyni [Rep] či ve Freudově výkladu lidské psychopatologie [Psy].

Literatura

[Bro] G. Desargues: *Brouillon project d'une Atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan.* Paris (1639).

[Děj] F. Kadeřávek: *Úvod do dějin rýsování a zobrazování nauk.* Praha (1954).

[Fce] O. Odvárko: *Funkce, matematika pro gymnázia.* Prometheus (1993).

[Mul] R. Hartley and A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision.* Cambridge University Press (2004).

[Psy] S. Freud: *Zur Psychopathologie des Alltagslebens.* Wien (1901).

[Rep] Platón: *Ústava.* Překlad František Novotný, Praha, OIKOYMENH (2005).

doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Matematický ústav MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`zbynek.sir@mff.cuni.cz`