

# Zbyněk Šír: Několik matematických a terminologických poznámek k Eukleidovým Základům

## 1 Úvod

Tento krátký článek je především autorovým svědectvím o jeho setkání s Eukleidovým dílem a řeckou matematikou obecně. Jedná se tedy o pohled matematika, který se však z různých důvodů poměrně důkladně seznámil s texty počátku novověké geometrie i geometrie antické.

Poprvé jsem se do *Základů* důkladněji začel v rámci přípravy na doktorskou zkoušku při svém studiu na Matematicko-fyzikální fakultě UK. Náš vedoucí, prof. Petr Vopěnka, totiž dobře věděl, že přímou četbu matematického díla takového významu není možno nahradit čtením si o něm pouze v sekundární literatuře. Jedním z požadavků zkoušky tedy byla podrobná diskuze nad některou významnou matematickou prací. Jak se později ukázalo, setkání s knihou, určenou individuálně každému z doktorandů, mělo velký vliv na jejich další práci. V mém případě se znalost Eukleida zúročila při práci v Centru pro práci s patristickými, středověkými a renesančními texty na projektu komentované antologie, která v tomto roce vyjde v nakladatelství Oikuméné pod názvem *Řecké matematické texty*.

Těžištěm připravované publikace jsou poměrně rozsáhlé řecké české ukázky z dochovaných antických prací. Čtenář se v ní seznámí s pracemi matematiků nejvýznamnějších (Eukleides, Archimédés,

Apollonios, Ptolemaios, Pappos, Diofantos) i těch méně významných, či hůře dochovaných; zařazujeme tedy rovněž všechny přeukleidovské zlomky, ukázky z neopythagorejské matematiky (Nikomachos z Gerasy a Theón ze Smyrny) a celou řadu ukázek z dalších menších autorů (Héron, Theón z Alexandrie, atd.). Tyto komentované a nově přeložené ukázky jsou doplněny stručnými úvody, jejichž cílem je poskytnout celkový obraz o řecké matematice, významu prezentovaných ukázek, o dochovaných pramenech atd.

Jedním z cílů tohoto článku je udělat určitou reklamu zmíněné připravované publikaci. Proto chceme upozornit na několik problémů a pozoruhodností, na něž jsme při naší práci narazili. V následujících kapitolách tedy stručně komentujeme několik konkrétních pasáží vybraných z Eukleida a částečně i z dalších dochovaných řeckých textů. Snažíme se přitom volně spojovat pohled jazykový a matematický. Nemáme přitom žádnou snahu o systematické pokrytí nějakého tématu; jedná se o dosti náhodný výběr, jehož cílem je především zaujmout a motivovat čtenáře. Celé řadě lukrativních témat se vyhýbáme, protože byla v českém prostředí již bohatě zpracována, kupříkladu autory ostatních příspěvků v tomto sborníku.

Nejprve se krátce zastavíme u prvních definic Eukleiova díla a u problémů spojených s překladem základních termínů. V další kapitole se přesuneme na samý konec Eukleidovy planimetrie a ukážeme souvislost mezi jeho řešením kvadratických úloh a vlastnostmi kuželošek. Následující kapitola se věnuje definici a vlastnostem tečny z hlediska infinitesimální matematiky. Na závěr se krátce zmíníme o zlatém řezu a jeho užití při konstrukci pravidelného dvanáctistěnu v poslední větě *Základů*.

## 2 Přímký nebo úsečky?

Základními objekty Eukleiova matematického světa jsou body, přímky, kružnice a později čísla a útvary prostorové.<sup>1</sup> Na tomto místě

<sup>1</sup> Na tomto místě zdůrazníme, že již dlouho před Eukleidem byly studovány

chceme ukázat některé obtíže spojené s volbou českých termínů, která je kvůli jejich četnému výskytu velmi důležitá.

Připomeňme si první čtyři definice Základů (uvádíme řecký originál z kritického vydání Heibergova<sup>2</sup> a Servítův český překlad<sup>3</sup>).

1. Σημείον ἐστίν, οὗ μέρος οὐθέν. - Bod jest, co nemá dílu.
2. Γραμμή δὲ μῆκος ἀπλατές. - Čára pak délka bez šířky.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεία. - Hranicemi čáry jsou body.
4. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.  
- Přímá jest čára (přímka), která se svými body táhne rovně.

S překladem termínu "bod" není zásadní problém, neboť je v současné školské matematice vypracován v duchu Eukleidově. V novém překladu se držíme přesněji řeckého originálu i moderní stylistiky a překládáme "Bod je to, co nemá žádnou část". Tato první definice je negativní a těžko tomu může být u tohoto základního pojmu jinak - je poukazem k náhledu do geometrického světa. Poznamenejme, že podobně definuje bod i Aristoteles jako "to, co je naprosto nedělitelné, ale má polohu" (srv. Met. 1016b24-26). Povšimněme si ještě řeckého termínu pro bod σημείον, který má význam „značka“ a začal se systematicky užívat právě od Eukleida. České slovo "bod" odpovídá staršímu řeckému termínu στιγμή s významem „stopa po bodnutí“. Aristotelés ve svých spisech užívá obou těchto termínů souběžně.

Definice druhá již přináší drobné úskalí: v češtině nemáme nadřazený odborný termín pro přímku a křivky. Je zvykem i přímku řadit mezi křivky, ale tento úzus (užívaný například v difereenciální geometrii) je zjevně v rozporu s etymologií: přímost je protikladem křivosti. Proto je nejlepším řešením ponechat Servítův termín čára, přestože zní poněkud neodborně a příliš evokuje fyzickou stopu

i další objekty zvláště kuželosečky a další rovinné i prostorové křivky; jasně vidíme, že cílem Základů nebylo pokrýt celou tehdejší matematiku.

2 *Euclidis opera omnia*, I-IV, vyd. I. L. Heiberg, Leipzig 1883-1888. Nejnovější vydání Heibergovy edice přepracoval E.S. Stamatis (Leipzig 1969-1973).

3 *Eukleidovy základy*, přel. F. Servít, Praha 1907.

po tužce. Poznamenejme, že v mnoha evropských jiných jazycích tento problém neexistuje; např. angličtina má "line", která může být "strait" nebo "curved".

Třetí definice uvádí do vztahu čáry a body. Řecké πέρας je možno překládat jako hranice, mez nebo konec. V novém překladu jsme se přiklonili k slovu "mez", zejména abychom se dostali do souladu s překladem záporu εἰς ἄπειρον - neomezeně. Chtěli jsme se vyhnout obratu "do nekonečna", který je zatížen novodobou představou aktuálního nekonečna. Zdůrazněme, že v antické matematice čára není složena z bodů, stejně jako čas není složen z okamžiků a že na čáře neexistují sousední body; to na několika místech opakuje např. Aristotelés. Body však mohou být mezemi čáry, pokud čára meze má (například kružnice body jako meze nemá).

Největší překladatelské problémy přináší definice čtvrtá, jejíž nový překlad zní "Přímá čára je ta, která je vůči bodům na ní ležícím položena stejně". Servítův překlad obratu ἐξ ἴσου jako "rovně" je poněkud zavádějící (snad se zde pokusil využít příbuznosti dvojic výrazů "přímý - rovný" a "rovný - stejný"). Jedná se však o stejnost ve smyslu identity (srv. předklad Heathův "evenly"<sup>4</sup>, či Vitracův "de maniere égal"<sup>5</sup>). Tato definice, která nebyla plně srozumitelná ani antickým komentátorům, zřejmě poukazuje na stejnorodost a symetrii přímé čáry.

Hlavním otázkou však je, jak dále v textu "přímou čáru" označovat. Servít užívá soustavně slova "přímka". To je však v kontextu moderní školské matematiky silně zatíženo - přímka se táhne do nekonečna. Žádné aktuálně nekonečné objekty však antická matematika neznala. Mnohem vhodnější je užívat termínu "úsečka", který si zvolil ve svém přetisku Servítova překladu Vopěnka.<sup>6</sup> I zde však narážíme na úskalí vysoké významové zatíženosti slova úsečka. Především úsečka je z něčeho useknutá - a z čeho vlastně (když přímka

4 *The Elements*, př. a kom. T. L. Heath, I-III, New York 1956, díl I, str. 153

5 *Les Eléments*, přel. a kom. B. Vitrac, I-IV, Paris 1990-2001, díl I, str. 154.

6 Eukleides, *Základy*, knihy I-IV, komentované Petrem Vopěnkou, Nymburk 2007.

neexistuje)? Dále je z některých pasáží Základů patrné, že přímá čára nemusí mít koncové body. Například ve větě 12 první knihy máme za úkol "Vést kolmici na danou neomezenou (ἄπειρον) přímkou <čáru> z daného bodu, který na ní neleží". Explicitně se tedy hovoří o přímé čáře, která nemá mezní body. Jsme přesvědčeni, že podobné pasáže není třeba interpretovat ve smyslu aktuální nekonečnosti přímé čáry. Postačí uznat, že Eukleidés užívá přímých čar jejichž zakončenost se explicitně neřeší - v intencích Vopěnkových bychom řekli, že jejich meze leží na obzoru, či za ním.

Český jazyk však umožňuje poměrně elegantní a jednoduché řešení, totiž podržet doslovné "přímá čára". Rovněž se nám osvědčilo v souladu s řečtinou opomenout na mnoha místech slovo "čára" a ponechat pouze zpodstatnělé "přímá". Tento termín je osvobozen od silně zafixované nekonečnosti spojené se slovem "přímka" a nechává tak vyniknout jedinému konstitutivnímu znaku, totiž přímosti. Poznamenejme ještě, že toto řešení není možné např. v angličtině, kde analogické "strait line", či pouze "strait" je běžně užíváno a nese tak celou zátěž moderního pojetí.

### 3 Kvadratické problémy a kuželosečky.

Přejdeme nyní na samý konec Eukleidovy planimetrie k větám 28 a 29 šesté knihy. Na připojených obrázcích (viz obr. 5-6) máme zadánu přímkou čáru AB, plošný obsah  $\Gamma$  a tvar reprezentovaný rovnoběžníkem  $\Delta$ . Naším úkolem je sestavit rovnoběžník, (na obrázku 5 se jedná o rovnoběžník s přeponou  $A\Xi$  a na obrázku 6 o rovnoběžník  $A\Sigma\Pi$ ), který má stejný obsah jako  $\Gamma$ , a který přímkou čáru AB bud' přesahuje o rovnoběžník daného tvaru  $\Delta$  (obrázek 5), nebo mu do ní takový rovnoběžník chybí (obrázek 6).

Tyto věty jsou vyvrcholením jednoho z Eukleidových významných témat - přeměny útvaru na útvar stejného obsahu. V tomto článku nemáme dostatek prostoru pro podrobnou matematickou

analýzu,<sup>7</sup> ale poznamenejme, že tato úloha odpovídá řešení kvadratických rovnic. Pro výšku  $v$  hledaného rovnoběžníka musí totiž platit

$$AB \cdot v \pm k \cdot v^2 = \Gamma,$$

kde  $k$  je konstanta závisající na tvaru rovnoběžníka  $\Delta$ ; "+" přitom platí pro obrázek 5 a "-" pro obrázek 6. Eukleidovo řešení je plně geometrické a je založeno na pozoruhodném konceptu gnómónu - na obrázku 5 se jedná o útvar  $\Lambda M \Xi N E B$ .

Zdůrazněme vztah těchto vět ke kuželosečkám. Jedná se totiž o úlohy „přiložit danou plochu k dané přímce s nadbytkem, případně nedostatkem“. V řečtině pak měly úlohy název ἑλλειψις a ὑπερβολή a později byly tyto termíny užity pro názvy kuželoseček elipsy a hyperboly.<sup>8</sup> Abychom vztah mezi kuželosečkami a Eukleidovými úlohami pochopili, obraťme naši pozornost k větám 11 a 12 Apollóniova spisu Kuželosečky (viz obr. 7 a 8). Pomocí prostorových úvah je zde obvozeno, že v kuželosečce existuje přímá čára zvaná průměr (například na obrázku 7 je to  $E\Delta$ ), která půlí úsečky rovnoběžné s jistým směrem (na obrázku 7 jsou to rovnoběžky s  $\Lambda M$ ). Navíc platí tak zvaná charakteristická vlastnost elipsy: čtverec nad  $\Lambda M$  je stejně velký jako obdélník  $E M \Xi O$ . Tento obélník je však získán právě vyřešením Eukleidovy úlohy ἑλλειψις. Vztah mezi hyperbolou a druhou z Eukleidových úloh je obdobný. Detaily je opět možno nalézt v připravované antologii, na tomto místě pouze vyzýváme čtenáře k porovnání příslušných obrázků (obrázku 5 s obrázkem 7 a obrázkem 6 s obrázkem 8).

<sup>7</sup> Podrobnější rozbor celého problému a Eukleidova řešení lze nalézt v chystané antologii, v komentářích k těmto větám v cizojazyčných vydání Základů - viz např. pozn. 4,5, či v knize Heath, T. L., A History of Greek Mathematics, 2 díly, Oxford 1921, díl 1, str. 394-397.

<sup>8</sup> Jméno paraboly pochází od nejjednodušší úlohy prostého přikládání, řecky παραβολή.

## 4 Definice a vlastnosti tečny.

Jednou z poměrně rozšířených pověr historie matematiky je představa, že infinitesimální matematika začíná až s Newtonem a Leibnizem (či s jejich několika bezprorostředními předchůdci). Pravdou však je, že již u antických geometrů nalézáme zcela korektní infinitesimální postupy a důkazy. Tato část matematiky vzkvétala rovněž u autorů arabských.<sup>9</sup> Infinitesimální úvahy se týkaly především určení obsahů a objemů (viz například dvanáctou knihu *Základů* a spisy Archimédovy). Tyto úvahy jsou předzvěstí integrace. Druhou oblastí, v níž se rozvíjely infinitesimální postupy bylo studium vlastností tečny, které je předzvěstí derivování. Poznamenejme ještě, že přínos Newtona a Leibnize spočívá (velmi zjednodušeně řešeno) v pochopení inverzního vztahu obou těchto úloh a dále v jejich formalizaci jejich řešení prostřednictvím algebraického (infinitesimálního) kalkulu.

Eukleidés uvažuje pochopitelně pouze tečnu ke kružnici, kterou vymezuje v definici 2 třetí knihy *Základů*.

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. - O přímé říkáme, že se dotýká kruhu, jestliže se s kruhem setkává, ale při prodloužení ho neprotíná.

Tečna je zde tedy v podstatě vymezena jako přímá čára, která má s kružnicí společný právě jeden bod. Tato definice je pochopitelně vhodná pouze pro vyjíměčné křivky; kromě kružnice ještě například pro elipsu a hyperbolu, ale ne už například pro parabolu - její průměr s ní má také jen jeden společný bod. V žádné případě tato definice není infinitesimální. Zárodek infinitesimálních úvah však můžeme nalézt ve větě 16 třetí knihy *Základů*:

*Přímá, která se vede kolmo k průměru kruhu a z jeho kraje, padne mimo kruh; do místa mezi tuto přímou a kružnici se jiná přímá nevejde; úhel půlkruhu je větší než každý ostrý přímočarý úhel, zatímco zbývající úhel je menší.*

<sup>9</sup> Viz např. monumentální dílo R. Rahed, *Les mathématiques infinitesimales du IX au XI siècles*, 1-4, London 1993-2000.

Jak je obvyklé, znění věty se vyjasní až při konkretizaci na připojeném obrázku 1. Věta (mimo jiné) tvrdí, že mezi kružnicí a tečnu AE se žádná přímá čára již nevejde.<sup>10</sup> Tečna je zároveň jediná přímá čára s touto vlastností a má tedy extrémální vlastnost nejlepšího přilnutí ke kružnici.

Analogický výsledek dokazuje pro kuželosečky Apollonios z Pergy ve své práci *Kuželosečky*. Citujme větu 32 první knihy:

*Jestliže se vrcholem řezu kužele vede přímá rovnoběžně s přímou vedenou řádně, pak se řezu dotkne a do místa mezi řezem kužele a touto přímou se jiná přímá nevejde.*

Na připojeném obrázku 3 to znamená, že  $\Gamma A$  je tečnou a mezi ní a parabolou se již žádná jiná přímá čára nevejde. Tečna není u Apollonia definována, ale o přímce  $\Gamma A$  se má za dokázané, že je tečnou, když se nahlédne, že "celá leží vně paraboly". Má tedy společný bod, ale přitom celá leží na jedné straně čáry.

Nemožnost vložení další přímky mezi křivku a její tečnu je již matematicky silná vlastnost. Na rozdíl od definice umožňuje například rozlišit skutečnou tečnu k hladké křivce (jak ji chápeme moderní diferenciální geometrie) od přímky procházející vrcholem čtverce, která zůstává mimo něj. U Archiméda však nalézáme vlastnost tečny kružnice, která plně obsahuje infinitesimální vlastnost tečny, totiž že aproximuje kružnici až do prvního řádu. Ve větě 5 spisu *O spirálách* Archimédés dokazuje (viz obrázek 4), že můžeme vést přímou čáru středem (například  $K\Theta Z$ ) tak, aby poměr  $\Theta Z$  k délce oblouku  $B\Theta$  byl libovolně malý.

## 5 Zlatý řez.

Na závěr se krátce zmíníme o významu takzvaného zlatého řezu v

<sup>10</sup> Tato věta fascinuje matematiky mnoha staletí především proto, že se zde uvažuje jiný úhel než přímočarý. Úhel doteku je pro Eukleida nenulový, ale menší než libovolný přímočarý úhel. Máme zde tak jasný výskyt nekonečně malé veličiny.

řadě Eukleidových konstrukcí. Jeho vymezení nalézáme v definici 3 šesté knihy Základů.

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετραῖσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλαττον. - O přímé řekneme, že je rozřata v *poměru krajním a středním*, jestliže se celá má k většímu úseku jako větší k menšímu.

Termín "dělení ve zlatém řezu" pochází až z renesance, kdy jeho vlastnosti byly často studovány a kdy sloužilo jako kritérium krásy.<sup>11</sup> Pro Eukleida je toto dělení v poměru krajním a středním především prostředkem ke konstrukci pravidelného pětiúhelníka a dvanáctistěnu. Pozoruhodné je, že konstrukci tohoto rozdělení nalézáme v Základech hned dvakrát. Nejprve je ve větě 11 druhé knihy máme za úkol *Danou přímou rozetnout tak, aby se obdélník sevřený celou přímo a jedním z úseků rovnal čtverci nad zbývajícím úsekem*. Později ve větě 30 šesté knihy máme *rozdělit danou přímo v poměru krajním a středním*. Tato dvojí formulace souvisí se strukturou Eukleidova spisu. První čtyři knihy se vyhýbají užití teorie proporcí. Není tedy možno hovořit o rovnosti poměrů, ale pouze o rovnosti obsahů. Řada vztahů tak má dvojí formulaci.<sup>12</sup>

Užití rozdělení ve zlatém řezu při konstrukci pravidelného pětiúhelníka je dobře známo. Na tomto místě však chceme zmínit jeho klíčový význam při konstrukci pravidelného dvanáctistěnu - viz obrázek 9. Východiskem je krychle, která reprezentuje jakýsi trojrozměrný souřadnicový systém. Polovina její strany se rozdělí v poměru zlatého řezu a pak jsou konstruovány vrcholy dvanáctistěnu čistě užitím kratší a delší úsečky tohoto rozdělení. Tak například úsečky PO, ΣΟ, ΠΤ, ΤΧ, ΡΥ a ΦΣ jsou stejně dlouhé jako delší část

rozdělení a úsečky PN, ΣΞ a ΤΘ jako kratší část rozdělení. Body Υ, Φ a Χ jsou tedy sestrojeny ve vzdálenosti delší části rozdělení od nejbližší stěny krychle a jejich průměty mají na krychli "souřadnice" vyjádřeny rovněž pomocí delší a kratší části rozdělení. Díky konstitutivní vlastnosti zlatého řezu se pak snadno dokáže, že body ΒΧΓΦΥ určují pravidelný pětiúhelník. Například to, že všech pět leží v jedné rovině plyne z rovnosti ΘΟ : ΟΥ = ΧΤ : ΤΘ, neboli "celá se má k většímu úseku jako větší k menšímu".

## 6 Závěr

Tento skromný příspěvek a chystaná antologie má být především výzvou k četbě dochovaných antických prací. Vzhledem k nezbytné jazykové a historické erudici je obtížné stát se skutečným odborníkem na řeckou matematiku a zdůrazněme, že autor tohoto článku se za něj nepovažuje. Každému zájemci o matematiku či řeckou kulturu může však přímá a podrobná četba řeckých matematických textů poskytnout poznání a radost, spočívající, dle mého názoru, především v napětí mezi podobností a současnou odlišností mezi matematickým myšlením a vyjadřováním moderním a antickým.

11 Podrobné pojednání o tomto tématu lze nalézt v: R. Herz-Fischler, *A mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*, Waterloo (Ontario, Canada), 1988.

12 Oba přístupy byly přitom obvyklé před Eukleidem. Jako příklad uveďme názor Aristotelův na formulaci problému kvadratury obdélníka - De an. 413a17-20: „Například na otázku, co je kvadratura, odpovídáme, že je to rovnost pravouhlého rovnostranného čtyřúhelníka s obdélníkem. Avšak ten, kdo řekne, že kvadratura je nalezení střední úměrné, udává také důvod věci.“