Přibližná parametrizace křivek pro robotiku

Kateřina Dobiášová a Zbyněk Šír

KDM MFF UK
Sokolovská 83, Praha
kacka.dobias@gmail.com, zbynek.sir@mff.cuni.cz

Abstrakt. V našem příspěvku představujeme metodu pro přibližnou parametrizaci algebraických křivek vysokého stupně. Tato metoda je založena na kombinaci G^1 interpolace ve vybraných bodech a L_2 aproximace na zbylých částech křivky. Dále metodu aplikujeme na jistou křivku popisující singulární pohyb paralelního manipulátoru.

Klíčová slova: Splajny, přibližná parametrizace, implicitní křivky, paralelní manipulátor.

1 Úvod

V nejrůznějších oblastech aplikované geometrie jsou využívány polynomiální a racionální křivky a plochy. Přitom jsou obvykle upřednostňovány geometrické objekty popsané parametricky před objekty zadanými implicitně. Důvodem je především jednodušší zobrazení a případně výroba parametrických objektů. Celá řada geometrických problémů a konstrukcí však vede na implicitní rovnice, které je později nutno parametrizovat. Jak je známo z elementární algebraické geometrie, třída všech algebraických křivek/ploch je podstatně širší než třída křivek/ploch racionálních. Z tohoto důvodu techniky přesné algebraické parametrizace v mnoha případech selhávají a je nutno sáhnout k technikám přibližným.

Naše publikace navazuje na několik prací věnovaných přibližné parametrizaci [2, 3, 4]. Představujeme novou metodu, která je založena na kombinaci G^1 interpolace ve vybraných bodech a následné aproximace vybraného segmentu implicitní křivky. Naši metodu dále používáme pro řešení problému aplikované robotiky převzatého z [1].

2 Obený popis užité metody parametrizace

V této kapitole popíšeme obecný algoritmus pro přibližnou parametrizaci implicitní rovinné křivky

$$f(x, y) = 0.$$

Algoritmus pracuje tím způsobem, že nejprve nalezne řadu bodů S_i, ležících na křivce f, které ji rozdělí na několik úseků. Na každém úseku pak nalezne přibližnou parametrizaci příslušného segmentu křivky f pomocí Bézierovy křivky $B(\alpha)$ tak, aby sousední úseky měly v krajním společném bodě stejnou tečnu. Nakonec tuto parametrizaci na každém segmentu optimalizujeme a jednotlivé části spojíme do po částech polynomiální (splajnové) křivky.

Algoritmus popíšeme schématicky ve třech krocích:

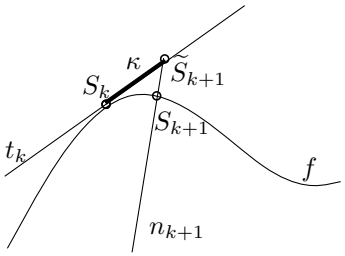
1. Nalezení dělících bodů S_i.
2. Sestrojení počátečních Bézierových kubik na úsecích S_iS_{i+1}.
3. Optimalizace jednotlivých Bézierových kubik.

Nyní každý krok popíšeme podrobně.

Krok 1 Mějme rovinnou implicitní křivku f. Na této křivce nalezneme jeden bod S_1 (například protínáním křivky vhodnou testovací sadou přímek). Bod S_1 je počátečním bodem postupu pro nalezení bodů S_i na křivce f.

Obecně tento postup popíšeme pro bod $S_k \in f$ - viz obr 1. v bodě S_k sestrojíme tečnu $t_k(S_k)$ ke křivce f, jejíž normálový vektor získáme jako $\nabla f(S_k)$. Z této tečny budeme uvažovat jen polopřímku s krajním bodem S_k, přičemž v každém kroku algoritmu zachováme směr, který zvolíme na počátku. Na této polopřímce vezmeme bod $\widetilde{S}_{k+1}$ v dané vzdálenosti (která je parametrem algoritmu) od S_k

$$|S_k\widetilde{S}_{k+1}| = \kappa.$$



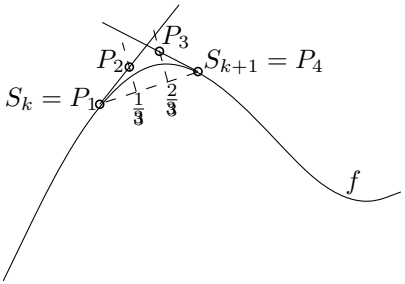
Obrázek 1: Konstrukce bodu S_{k+1} jako následovníka bodu S_k.

V bodě $\widetilde{S}_{k+1}$ dále sestrojíme přímku $n_{k+1} = (\widetilde{S}_{k+1}, \nabla f(\widetilde{S}_{k+1}))$ a nalezneme bod S_{k+1} jako průsečík přímky n_{k+1} a křivky f. Bod S_{k+1} je dalším bodem na křivce f.

Opakováním algoritmu nalezáme body na křivce, dokud ji celou neobejdeme. Výsledkem prvího kroku je uspořádaný seznam bodů ležících na křivce f.

Při této konstrukci může nastat několik problémů. Pokud je bod S_{k+1} singulárním bodem křivky f, nemůžeme sestrojit tečnu v tomto bodě. Takové body musí být vynechány (například zvýšením konstanty κ). V případě, že přímka n_{k+1} a křivka f mají více společných bodů, zvolíme příslušnou polopřímku přímky n_{k+1} a vybereme ten bod, který je nejblíže bodu $\widetilde{S}_{k+1}$.

Krok 2 Na každém úseku S_kS_{k+1} vytvoříme Bézierovu kubiku. Pro definování Bézierovy kubiky $B(\alpha)$ potřebujeme čtyři body $P_1, ..., P_4$. Za krajní body Bézierovy kubiky vezmeme body $P_1 = S_k$, $P_4 = S_{k+1}$. Za body P_2, P_3 vezmeme obecně body ležící na tečnách $t_k(p_k), t_{k+1}(p_{k+1})$ v krajních bodech S_k, S_{k+1}. Souřadnice bodů P_2, P_3 jsou tedy vyjádřeny pomocí parametrů p_k, p_{k+1} - viz obr. 2.



Obrázek 2: Úsečka S_kS_{k+1} je rozdělena na třetiny. V jedné a ve dvou třetinách sestrojíme kolmice k úsečce S_kS_{k+1} a nalezneme průsečíky s tečnami $t_k(p_k), t_{k+1}(p_{k+1})$. Hodnoty parametrů pro tyto body na tečnách vezmeme jako počáteční.

Krok 3 V posledním kroku algoritmu přiblížíme na každém úseku Bézierovu kubiku co nejblíže k původní křivce. Tedy budeme optimalizovat hodnotu parametrů p_k, p_{k+1} tak, abychom minimalizovali vhodnou funkci vzdálenosti parametrické Bézierovy křivky $B(\alpha)$ od segmentu implicitní křivky f. Je tedy třeba hledat minimum vhodné funkce (tzv. objective function). Po řadě experimentů jsme zvolili následující funkci, která přibližně vyjadřuje L_2 vzdálenost obou křivek

$$\int_0^1 \frac{f(B(\alpha))^2}{||\nabla f(B(\alpha))||^2} d\alpha.$$

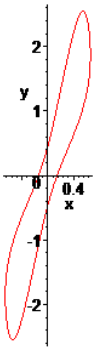
Minimalizace této funkce je nelineární optimalizační problém, který řešíme numericky pomocí Newtonovy metody. Volba počátečních hodnot parametrů p_k, p_{k+1} je patrná z obr. 2.

3 Aplikace na samopohyb paralelního manipulátoru

Jak popsal A. Karger v [1], paralelní manipulátor může za určitých okolností vykazovat vlastní pohyb, tedy pohyb ,ke kterému dochází při konstantních délkách ramen. Tento pohyb je popsán v prostoru parametrů (na Studyho sféře) pomocí soustavy implicitních nelineárních algebraických rovnic. Pro vizualizaci je nezbytné vlastní pohyb parametrizovat.

Vzhledem k nemožnosti provést přesnou parametrizaci budeme aplikovat přibližnou metodu popsanou v předchozí kapitole.

Soustavu implicitních křivek je možno pomocí projekcí redukovat na jedinou rovinou křivku, z níž je možno (po parametrizaci) pohyb zrekonstruovat. Uveďme příklad jedné takové křivky převzatý z [1] - viz obr. 3.



Obrázek 3: Příklad implicitní křivky šestého stupně.

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad = \quad & -2601900 - 99975456\,x^3y^3 + 68112324\,x^2y^4 - 47996928\,x^5y \\ & -12771360\,xy^5 + 9613800\,y^2 + 159460956\,x^4 + 121674924\,x^2 \\ & +12921300\,y^4 + 705600\,y^6 + 15256836\,x^6 + 97135560\,x^4y^2 \\ & +204604848\,x^2y^2 - 171734976\,x^3y - 90740160\,xy \\ & -103511520\,xy^3 = 0. \end{aligned}$$

Tuto křivku zparametrizujeme pomocí algoritmu popsaného v předchozí kapitole.

Krok 1 V prvním kroku získáme 14 bodů na křivce f - viz obr. 4

Krok 2 Vypočteme Bézierovy kubiky na všech úsecích. Uvádíme zde výsledek na úseku s krajními body S_{10}, S_{11}, pro nějž má aproximující Bézierova kubika kontrolní body

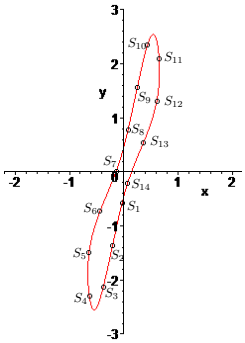
$$P_1 = [0.4374, 2.3453], \quad P_2 = [0.4374 + 9.9876\,p_{10}, 2.3453 + 31.8766\,p_{10}],$$
$$P_3 = [0.6531 - 2.2188\,p_{11}, 2.0998 + 32.5099\,p_{11}], \quad P_4 = [0.6531, 2.0998].$$

Krok 3 Minimalizací funkce

$$\int_0^1 \frac{f(B(\alpha))^2}{||\nabla f(B(\alpha))||^2} d\alpha$$

dojdeme ke konečným parametrům $p_{10} = 0.9836 \times 10^{-2}$ a $p_{11} = 0.1648 \times 10^{-1}$, pomocí kterých získáme optimální Bézierovu kubiku:

$$\begin{aligned} B(\alpha) \quad = \quad & [0.4374\,(1-\alpha)^3 + 1.6071\,\alpha\,(1-\alpha)^2 + 1.8497\,\alpha^2\,(1-\alpha) + 0.6531\,\alpha^3 \\ & 2.3453\,(1-\alpha)^3 + 7.9767\,\alpha\,(1-\alpha)^2 + 7.9076\,\alpha^2\,(1-\alpha) + 2.0998\,\alpha^3]. \end{aligned}$$



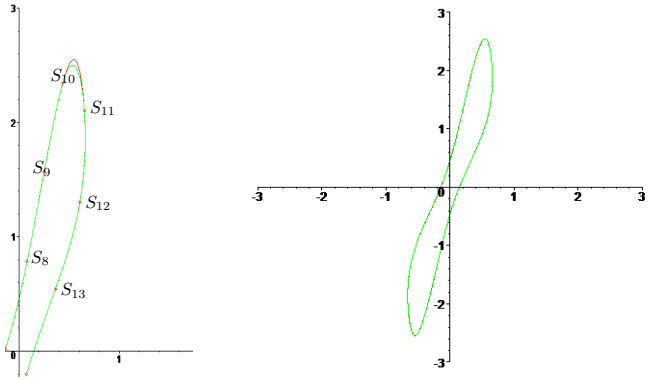
Obrázek 4: Body nalezené pomocí kroku 1 algoritmu.

Chyba parametrizace. Chyba přibližné parametrizace závisí na konstantě κ a v důsledku na vzdálenosti bodů S_k, S_{k+1}. Ukážeme tři hodnoty chyby při různých vzdálenostech krajních bodů. Chybu vyhodnocujeme samplováním maximální vzdálenosti původní křivky od nové parametrické křivky.

1. Na křivce je nalezeno 14 bodů. Na jednotlivých úsecích jsou nalezeny následující chyby parametrizace (vzdálenost Béziérových kubik od původní křivky):
   0.3671×10^{-4}, 0.5982×10^{-5}, 0.4670×10^{-1}, 0.2366×10^{-3},
   0.6131×10^{-5}, 0.9800×10^{-5}, 0.6470×10^{-4}, 0.1539×10^{-4},
   0.6178×10^{-4}, 0.2741, 0.9446×10^{-4}, 0.1852×10^{-4},
   0.2547×10^{-2}.
   Maximum z těchto hodnot (a tedy celková chyba parametrizace) je 0.2741 a nastává mezi body S_{10}, S_{11} - viz obr. 5, nalevo.
2. V případě, že na křivce nalezneme 44 bodů, bude maximální vzdálenost 0.0518.
3. V posledním případě nalezneme na křivce 130 bodů. Maximální vzdálenost je potom 0.6789×10^{-3}. Pokud vykreslíme zparametrizované úseky a původní křivku, není již jako v prvním případě patrný rozdíl - viz obr. 5, napravo.

4 Závěr

V našem příspěvku jsme představili metodu pro přibližnou parametrizaci algebraických rovinných křivek. Tato metoda je založena na kombinaci G^1 interpolace ve vybraných bodech a L_2 aproximace na zbylých částech křivky. Funkčnost metody jsme prokázali aplikací na křivku popisující samopohyb paralelního manipulátoru. V budoucnosti plánujeme zobecnit



Obrázek 5: Chyba mezi původní křivkou f (červená) a Bézierovou křivkou (zelená) pro křivku rozdělenou na 14 segmentů (chyba je viditelná ve zvětšení) a na 130 segmentů (chyba již není na pohled patrná).

algoritmus pro nalezení všech větví singulárních křivek. Rovněž chceme využít parametrizace konkrétních křivek k vizualizaci samopohybu paralelního mainipulátoru.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu MSM 0021620839 financovaného MŠMT a za podpory grantu č. 1047/2008 FRVŠ.

Literatura

[1] A. Karger: *Self-motions of Stewart-Gough platforms,* Computer Aided Geometric Design (2008), doi:10.1016/j.cagd.2008.09.03

[2] Laurent Dupont, Daniel Lazard, Sylvain Lazard, Sylvain Petitjean: *Near-Optimal Parameterization of the Intersection of Quadrics: The Generic Algorithm,* INRIA rapport de recherche, No 5667, Septembre 2005

[3] Erich Hartmann: *Numerical parameterization of curves and surfaces,* Computer Aided Geometric Design 17 (2000) 251-266

[4] Bert Jüttler, Pavel Chalmovianský: *A predictor-Corrector-Type Technique for the Approximate Parameterization of Intersection Curves,* Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing archive Volume 18 , Issue 1 (January 2007)