

# Triangulace pomocí kruhových oblouků a metoda konečných prvků

Kateřina Čech Dobiášová, Zbyněk Šír

*Katedra didaktiky matematiky, MFF UK  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
kacedobi@gmail.com*

*Matematický ústav UK, MFF UK  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
zbynek.sir@mff.cuni.cz*

**Abstrakt.** Nahrazení rovných hran v triangulaci za vhodné kruhové oblouky vede k vylepšení nejmenších úhlů v triangulaci. Jedna z vhodných oblastí pro aplikaci této vylepšené triangulace je metoda konečných prvků. Při zachování stejného počtu trojúhelníků dosáhneme lepších výsledků především díky lepší triangulaci a také lepší reprezentaci oblastí. Zejména pro oblasti, které mají po částech kruhovou hranici, je tato metoda výhodná.

*Klíčová slova:* Oblouková triangulace, metoda konečných prvků, isogeometrická analýza.

## 1 Úvod

Trojúhelníkové sítě jsou nezbytným nástrojem geometrického zpracování dat. Slouží k rozdělování a spojování struktur a hrají ústřední roli v geometrické reprezentaci. Kvalita dané triangulace samozřejmě závisí na velikosti a tvaru tvořících trojúhelníků. Zejména úhly v triangulaci patří mezi kritické otázky v hlavních oblastech aplikace, jako je modelování, interpolace a metoda konečných prvků. Například trojúhelníky s malými úhly způsobují nevyhovující podmínky pro metodu konečných prvků [2].

Pro praktické účely je často volena Delaunayho triangulace, protože maximalizuje nejmenší úhly přes všechny možné triangulace dané konečné množiny bodů v rovině. Přesto se nelze vyhnout občasnému výskytu „špatného“ trojúhelníku, zejména v blízkosti hranice vstupní oblasti nebo z důvodu přítomnosti vrcholů s vysokým počtem hran. Tyto vrcholy nelze vylepšit přehozením hran nebo jinou lokální operací, protože rozmístění hran Delaunayho triangulece je již optimální vzhledem k úhlům.

Situace se změní v případě, že požadavek, aby hrany triangulace byly úsečky, zrušíme. Některé aplikace nejsou omezeny požadavkem, aby hrany triangulace byly úsečky a pro některé dokonce úsečky nejsou vhodné. Například v metodě konečných prvků příslušná funkce může být definována výhodně nad „trojúhelníky“ s nelineárními hranami. Také v aplikacích zabývajících se kreslením grafů může ponechání rovných hran znamenat překážku v čitelnosti vykresleného grafu. V těchto a dalších aplikacích, výpočetních a estetických výhod grafu, který zaručuje pěkné úhly, můžeme dosáhnout pouze tehdy, pokud jsou povoleny zakřivené hrany [1].

## 2 Optimalizace triangulace a MKP

V tomto článku se budeme zabývat aplikací tzv. triangulací pomocí kruhových oblouků na metodu konečných prvků. Zkráceně budeme psát oblouková triangulace a klasickou triangulaci s hranami ve tvaru úseček budeme nazývat rovnou triangulací. Na příkladu porovnáme výsledky získané použitím klasické triangulace a tzv. obloukové triangulace.

Úprava triangulace takovýmto způsobem přináší několik výhod v případě, že je potřeba optimalizovat úhly. Typicky se malé úhly v rovné triangulaci vyskytují v okolí hranice oblasti. Takové úhly mohou být nyní pomocí optimalizace křivostí oblouků dané triangulace zvětšeny. Další problém s malými úhly způsobují vrcholy s vysokým stupněm. Tato situace může být nyní zlepšena přehazováním hran v obloukové triangulaci tak, že redukuje stupeň vrcholu.

Maximalizace nejmenšího vrcholu v kombinatoricky pevné obloukové triangulaci může být formulována jako lineární program. To v praxi zaručuje rychlé řešení optimalizace triangulace obloukem.

### 2.1 Optimalizace úhlů

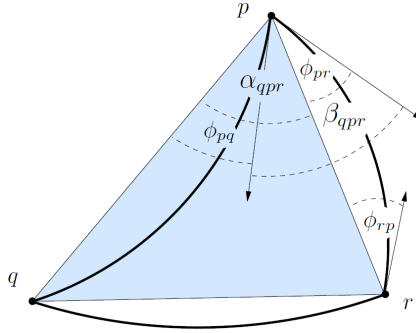
Uvažujme rovnou triangulaci  $\tau$  v dané oblasti  $D$  v rovině. Na  $D$  nejsou dána žádná omezení, ale pro usnadnění, necht'  $D$  je spojitá a má po částech kruhovou (nebo lineární) hranici. Obecně platí, že  $\tau$  bude používat vrcholy uvnitř  $D$ . Zajímá nás následující optimalizační problém: Nahraďte každou vnitřní (tj. ne hraniční) hranu  $\tau$  nějakým kruhovým obloukem tak, že nejmenší úhel ve výsledné triangulaci bude maximalizován.

Abychom viděli, že tento problém je správně definován, poznamenejme, že výsledná optimální triangulace  $\tau^*$ , nemůže obsahovat záporné úhly. Nejmenší úhel mezi oblouky musí být nejméně tak velký, jako nejmenší úhel  $\tau$ . Pro každý vrchol  $S$  platí, že pořadí oblouků procházejících  $S$  v  $\tau^*$  je stejné jako pořadí odpovídajících hran v  $\tau$ . Jinými slovy, každý obloukový trojúhelník v  $\tau^*$  je dobře orientovaný, tj. má stejnou orientaci jako jeho ekvivalent v  $\tau$ . Proto nemůže nastat žádné překrytí oblouků nebo obloukových trojúhelníků v  $\tau^*$ . Je zajímavé, že toto platí speciálně pro triangulaci, poslední závěry nejsou pravdivé, pokud základní prvky rozdělení mají více než tři hrany [1]. Předpokládejme dále, že obloukové trojúhelníky jsou dobře orientované.

Nyní zformulujeme optimalizaci úhlů jako lineární program. Pro každou rovnou hranu  $e = pq$  v triangulaci  $\tau$  zavedeme dvě proměnné  $\phi_{pq}$  a  $\phi_{qp}$ . Proměnná  $\phi_{pq}$  představuje úhel, který svírá oblouk

$\widehat{pq}$  s hranou  $pq$  při pohledu z  $p$  a  $\phi_{qp}$  při pohledu z  $q$  (obr.1). Pro všechny hrany  $pq$  platí  $\phi_{pq} = -\phi_{qp}$ .

Pro každou hranu  $e'$  v  $\tau$ , která leží na hranici  $\delta D$ , zafixujeme dvě odchylky  $d_{e'}$  a  $-d_{e'}$  s ohledem na  $\delta D$ . Tedy pro  $e' = pq$  na hranici máme  $\phi_{pq} = -\phi_{qp} = d_{e'}$ .



Obrázek 1: Odchylky

Vstupní nerovnosti pro optimalizaci pomocí lineárního programování vycházejí z úhlů  $\alpha_{qpr}$ , které svírají hrany v  $\tau$ . Dvě hrany  $pq$  a  $pr$ , které svírají úhel  $\alpha_{qpr}$  jsou sousední hrany z bodu  $p$ , kde  $pr$  je následující hrana proti směru hodinových ručiček. Potom bereme v úvahu úhel mezi dvěma příslušnými kruhovými oblouky  $\beta_{qpr} = -\phi_{pq} + \alpha_{qpr} + \phi_{pr}$  a položíme

$$\delta \leq \beta_{qpr}.$$

Lineární funkce  $L$ , která je maximalizována je jednoduše  $L = \delta$ .

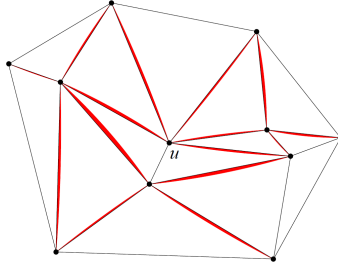
Je zřejmé, že maximalizace  $\delta$  bude maximalizovat nejmenší úhel  $\beta_{min}$  v obloukové triangulaci. Poznamenejme, že může nastat  $\beta_{min} < \frac{\pi}{3}$  v  $\tau^*$ , protože vzhledem ke kruhovým obloukům na hranici, může být součet vnitřních úhlů  $\delta D$  větší než  $\pi(h - 2)$ , kde  $h$  je počet vrcholů na  $\delta D$ . Pokud  $n$  je celkový počet vrcholů, máme  $O(n)$  nerovností/rovností a  $O(n)$  proměnných.

Někdy není cílem optimalizovat jen nejmenší úhel, ale maximalizovat lexikograficky seřazený seznam všech úhlů, tak jak to zaručuje Delauného triangulace. Toho můžeme dosáhnout opakovaným řešením lineárního programu se zafixováním již optimalizovaných úhlů.

V optimalizované triangulaci mohou vzniknout úhly větší než  $\pi$ . Pokud je v konkrétní aplikaci tento jev nežádoucí, můžeme přidat podmínku

$$-\phi_{pq} + \alpha_{qpr} + \phi_{pr} \leq \gamma$$

pro  $\gamma < \pi$ . Zejména volba  $\gamma = \pi - 2\delta$  současně sníží velké úhly a to vede k obloukovým trojúhelníkům tak „rovnoúhlým“ jak je to jen možné. Nicméně tím ztratíme možnost maximalizace nejmenšího úhlu nad prostorem všech možných obloukových triangulací. Další různá lineární omezení



Obrázek 2: Optimalizovaná Delaunayho triangulace

mohou mít smysl v různých aplikacích, jako zafixování součtu úhlů v každém obloukovém trojúhelníku na  $\pi$ , nebo udržení každého obloukového trojúhelníku uvnitř kružnice určené jeho třemi vrcholy.

Obrázek 2 ukazuje optimalizaci Delaunayho rovné triangulace s nejmenším úhlem u vrcholu  $u$ . Zlepšení je zde přibližně 41%.

## 2.2 Metoda konečných prvků

V isoparametrickém přístupu k metodě konečných prvků je oblast popsána souborem základních prvků  $P_i$ , kde každý je obrazem např. trojúhelníku  $\Delta_i$  při zobrazení  $G_i$ . Přesněji, množina bázových funkcí  $\psi_{ij}$  je na  $\Delta_i$  definována takto:

$$G_i = \sum \psi_{ij} c_{ij}.$$

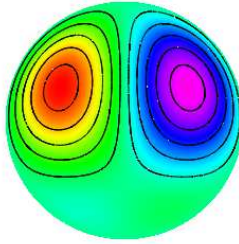
Koeficienty  $c_{ij}$  jsou obvykle odvozeny z vrcholů a středů hran základních prvků. Testovací funkce získáme složením bázových funkcí s inverzním zobrazením

$$f_{ij} = \psi_{ij} \circ G_i^{-1}.$$

Vhodným souborem funkcí definovaných na sousedních trojúhelnících získáme spojitě testovací funkce.

Každý obloukový trojúhelník může být reprezentován jako racionální kvadratický Beziérův trojúhelník. Bázové funkce jsou racionální Bernsteinovy bázové funkce. Můžeme předpokládat, že takový trojúhelník je ve standartní formě, tedy že váhy ve vrcholech jsou rovny jedné. Opět vhodným souborem funkcí na sousedních trojúhelnících získáme spojitě testovací funkce. Tedy, libovolná oblouková triangulace může být použita pro metodu konečných prvků. Počet testovacích funkcí je stejný jako v případě kvadratických prvků s rovnými trojúhelníky.

Použití obloukových trojúhelníků místo rovných nabízí dvě výhody. Za prvé, mnoho zajímavých oblastí pro numerické simulace má hranici po částech z kruhových oblouků. Takové oblasti mohou být pomocí obloukových triangulací reprezentovány přesně. Za druhé, oblouková triangulace



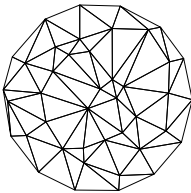
Obrázek 3:  $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \cos(x + 1) \sin(y)$

zlepšuje velikost vnitřních úhlů, takže prvky mají lepší tvar. To umožňuje získat menší chyby se stejným počtem trojúhelníků.

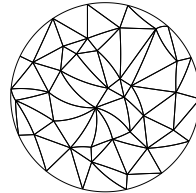
V sérii testovaných příkladů jsme ve výsledku vždy získali výrazně lepší přibližné řešení než se stejným počtem rovných trojúhelníků. Díky jednoduchosti naší optimalizace, mohou být optimalizovány i velké sítě a použity pro konečné prvky s rozumnou výpočetní dobou. Na příkladě ukážeme výsledné zlepšení.

**Příklad:** Uvažujme funkci  $u(x, y)$  (obr. 3) na jednotkovém kruhu splňující homogenní Dirichletovu hraniční podmínku a aproximujeme ji konečnými prvky odvozenými z obloukové triangulace a z rovné triangulace. Použijeme vyhovující kvadratické racionální a kvadratické polynomiální funkce konečných prvků.

Na obrázcích 4 a 5 jsou zobrazeny triangulované domény pomocí rovné a pomocí obloukové triangulace. Pomocí obloukové triangulace je hranice kruhu reprezentována přesně.

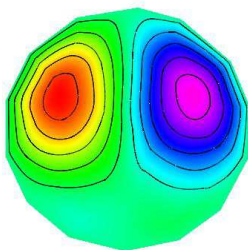


Obrázek 4: Rovná triangulace

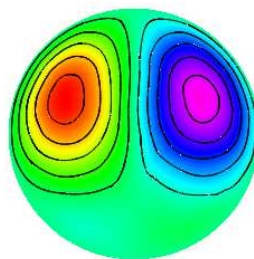


Obrázek 5: Oblouková triangulace

Výsledek je ukázán na obrázcích 6 a 7, kde aproximace funkce  $u(x, y)$  jsou reprezentovány pomocí vrstevnic. Jemné rozdíly jsou patrné především okolo hranice, ovšem čím více trojúhelníků je v triangulaci použito, tím méně můžeme z pouhého obrázku vyčíst. Při použití rovných trojúhelníků je chyba vypočtená samplováním 0,0404 a  $L^2$  chyba je 0.0033. V případě obloukové triangulace je chyba vypočtená samplováním 0,0079 a  $L^2$  chyba je 0.0001. V tomto i dalších testovaných příkladech vede použití obloukové triangulace ke značnému snížení chyby, které je způsobeno lepšími tvary trojúhelníků a vylepšené reprezentací oblasti.



Obrázek 6: Aproximace  $u(x, y)$  pomocí rovné triangulace



Obrázek 7: Aproximace  $u(x, y)$  pomocí oblé triangulace

## Reference

- [1] O. Aichholzer, W. Aigner, F. Aurenhammer, K. Čech Dobiášová, B. Jüttler. *Arc triangulations*. In Proc. 26th European Workshop on Computational Geometry EuroCG 2010, 17-20.
- [2] J. Shewchuk. *What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures*. Proc. 11th International Meshing Roundtable, 2002, 115-126.
- [3] T.J.R Hughes. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Reprint, Dover Publications, New York.