Křivky v diferenciální geometrii a geometrickém modelování

Curves in differential gemetry and in geometric modeling

Zbyněk Šír

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, Praha
zbynek.sir@mff.cuni.cz

Abstract. In this paper I want to discuss my experience with teaching Differential geometry and Geometric modeling at the Charles University. In particular I want to focus on several concrete topics and different ways how to handle them. The most interesting is connection between the theoretical and applied aspects of these topics. We will thus discuss the reparameterization of curves, curvature, torsion, various frames along the curve, polynomial and rational curves.

Keywords: differential geometry, geometric modeling, curvature, reparameterization, rotation minimizing frame

Klíčová slova: diferenciální geometrie, geometrické modelování, křivost, reparametrizace, repér minimální rotací.

1 Úvod

V tomto příspěvku se chceme zamyslet nad některými tématy a problémy, se kterými se setkáváme při výuce geometrických předmětů pro obor Obecná matematika na MFF UK. Nepůjde přitom o nějké převratné objevy. Většina látky, kterou zmíníme je standartní. Spíše se bude jednat o určitá pozorování, koncepty a přístupy, která dle našich zkušeností mohou přispět ke zkvalitnění výuky.

Geometrie není na naší fakultě ve studiu příliš bohatě zastoupena. V rámci hlavního matematického bakalářského oboru *Obecná matematika* se setkáváme s tradiční dominancí matematické analýzy. Rovněž algebraické předměty jsou poměrně dobře zastoupeny. Z geometrických předmětů je povinná pouze diferenciální geometrie po jeden semestr v rozsahu 2/1. Na ní volně navazuje nepovinně volitelný předmět Geometrické modelování. Právě o zkušenosti s výukou těchto dvou předmětů se opírá tento příspěvek.

Přes omezenou hodinovou dotaci je možno pojmout vyuku relativně náročně, právě proto, že se můžeme opřít o řadu znalostí z kvalitně pojaté analýzy a lineární algebry. Můžeme tak z matematické analýzy předpokládat velmi solidní znalosti z diferenciálního a integrálního kalkulu jedné a více proměnných, křivkový a plošný integrál včetně Greenovy věty a teorie řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Z lineární algebry pak využijeme dobrou znalost vlastností vektorových prostorů, rozkladu matic a zejména orthogonální diagonalizace bilineárních forem.

2 Význam parametrizované křivky

Na rozdíl od teorie ploch je diferenciální geometrie křivek založena podstatně na *globální parametrizaci*. Je to způsobeno tím, že křivky na rozdíl od ploch nemohou mít komplikovanou topologii. „Lepením“ obrazů intervalů dostaneme vždy pouze obraz intervalu (případně uzavřenou křivku jako obraz kružnice), není možné žádné větvení. Proto je vhodné vyjít z definice parametrizované křivky, tedy dostatečně hladkého regulárního zobrazení z intervalu do reálného prostoru

$$\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

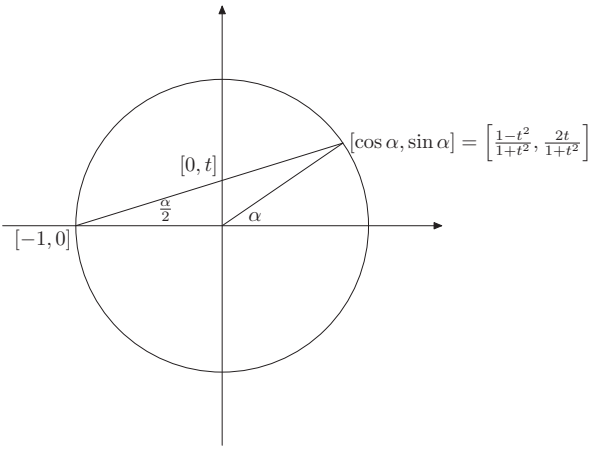
Zobecnění do vyšší dimenze podle mého názoru nepřináší hlubší matematické pochopení a je vhodnější se mu vyhnout. Naopak zásadní je pojem reparametrizace

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) := \mathbf{c}(\phi(\tilde{t})), \qquad \tilde{t} \in \tilde{I}, \tag{2}$$

kde $\phi : \tilde{I} \to I$ je diffeomorfismus (či obecněji bijekce která má dostatečně mnoho derivací spojitých stejně jako její inverze). Křivku pak definujeme jako třídu všech reparametrizací a diferenciální geometrii chápeme jako studium vlastností nezávislých na reparametrizaci.

Hledání vhodných parametrizací je velmi důležité, ale prakticky není možné se mu rychle naučit, protože odhaluje pravé geometrické a matematické myšlení. Dovolím si uvést svých několik oblíbených příkladů.

- **Kubiky.** Máme implicitní křivku jako množinu bodů v rovině, které splňují rovnici $y^2 - x^3 - x^2 = 0$. Najděte parametrizaci této křivky.
- **Cykloida** Najděte parametrický popis trajektorie bodu, který leží na povrchu kola o poloměru a, které se valí bez prokluzování po ose x doprava konstantní rychlostí v, přitom v čase $t = 0$ se bod nachází v bodě $[0, 0]$.
- **Epicykloida.** Uvažujme kružnici o poloměru r, která se valí po vnější straně kružnice o poloměru R. Parametricky popište trajektorii zvoleného bodu na pohyblivé kružnici. Načrtněte tuto křivku pro případ $R = r$, určete parametrický interval na němž se křivka uzavře a spočtěte její délku.
- **Kissoida.** Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A-P| = |Q-R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny.
- **Tractrix** je křivka v $\mathbb{R}^2$, kterou opisuje hmotný předmět A, který je tažený na provázku délky 1 předmětem B. Ve počátečním čase $t = 0$ se předmět A nachází v bodě $(0, 1)$ a předmět B v bodě $(0, 0)$. Předmět A se pohybuje konstantní rychlostí 1 podél osy x doprava. Najděte parametrizaci tractrixu.



Obrázek 1: Dvě různé parametrizace kružnice.

- **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr.

3 Reparametrizace křivek

Je vhodné rovněž procvičovat reparametrizaci křivek. Jako jednoduchý příklad lineární reparamterizace uveďme různé parametrizace úsečky. V prostoru mějme body $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, -2, -1]$. Nalezněte regulární parametrizaci úsečky AB. Nalezněte všechny parametrizace $\mathbf{c}(s)$ úsečky AB obloukem tak, aby bod $\mathbf{c}(0)$ ležel ve třetině AB, blíže k bodu A. Nalezněte parametrizaci AB tak, aby obsahovala singulární bod, tj. bod, kde je vektor první derivace nulový.

Velice krásným příkladem jsou však dvě různé parametrizace jednotkové kružnice bez bodu $[-1, 0]$, viz Obr. 1. Ta je samozřejmě parametrizována jako $[\cos(\alpha), \sin(\alpha)]$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$. Zároveň ji však můžeme parametrizovat stereografikou projekcí z osy y se středem v bodě $[-1, 0]$. Přesněji uvažujme přímku, která spojuje body $[-1, 0]$ a $[0, t]$. Jako snadné cvičení z analytické goemetrie nahlédneme, že protne kružnici v dalším bodě o souřadnicích

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right]. \tag{3}$$

Když měníme parametr $t \in \mathbb{R}$, procházíme celou kružnici (bez bodu $[-1, 0]$). Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem je patrné, že obě parametrizace spolu souvisí prostřednictvím reparametrizace $t = \tan(\alpha/2)$. Tento příklad je velmi elegantní, protože poskytuje vzorce pro vyjádření funkcí $\cos$ a $\sin$ pomocí tangens poloviního úhlu. Zároveň poskytuje racionální parametrizaci kružnice.

Racionální parametrizace mají z hlediska reparametrizací ještě jednu důležitou vlastnost, totiž že jejich stupeň se nemění při reparametrizaci lineární lomenou funkcí. Speciálně funkce tvaru

$$t = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}, \qquad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ je pevné} \tag{4}$$

jsou difeomorfismy intervalu $[0, 1]$ na sebe. Kupříkladu tak parametrizace 3 pro $t \in [0, 1]$ parametrizuje čtvrtinu kružnice ležící v prvním kvadrantu. Pomocí reparametrizace 4 můžeme upravit distribuci parametru na tomto intervalu a přitom získat parametrizaci téhož typu.

Při obecném pohledu na reparametrizace je klíčové vědět, jak se mění jejich derivace. Máme-li parametrizaci $\mathbf{c}(t)$ a její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) := \mathbf{c}(\phi(s))$, pak derivováním složené funkce dostáváme $\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} \cdot \frac{d\phi}{ds}$. Podobně můžeme pokračovat pro vyšší derivace. Pokud zavedeme zjednodušující zápis, ve kterém reparametrizovanou křivku označujeme $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ a dále tečkou značíme derivaci $\frac{d}{dt}$ a čárkou derivaci $\frac{d}{ds}$, dostáváme vztahy pro první tři derivace, které můžeme shrnout v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & 0 & 0 \\ t'' & (t')^2 & 0 \\ t''' & 3t't'' & (t')^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \dddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Jedná se o jakousi matici přechodu, která bude hrát klíčovou roli ve studiu invariantů křivek (křivost a tozre). Rovněž z ní můžeme vyčíst některé geometrické vlastnosti. Například vektory první a druhé derivace vždy určují stejnou rovinu (oskulační) a navíc vektor druhé derivace míří do stejné poloroviny (která obsahuje střed křivosti).

4 Repéry podél křivky

Máme-li parametrizaci $\mathbf{c}(t)$, pak z první rovnice (5) plyne, že parametrizaci obloukem získáme reparametrizací $t(s)$, která splňuje $|t'| = 1/||\dot{\mathbf{c}}||$. Zároveň je zjevné, že každé dvě parametrizace obloukem se liší pouze reparametrizací $\tilde{s} = \pm s + s_0$, tedy počátečním bodem a směrem procházení. Parametrizace obloukem je tak přirozená, že je téměř „geometrická“. Je to význačný reprezentant třídy všech reparametrizací, neboť odpovídá isomorfismu parametrickéo inervalu a obrazu křivky. Proto je vhodné využít jí k definici základních pojmů. Tento postup se nám osvědčil lépe, než jejich definice v obecné parametrizaci.

Definujeme tedy v parametrizaci obloukem tečný vektor $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ a křivost $\kappa = ||\mathbf{t}'||$ jako velikost změny tohoto vektoru. Při nenulové křivosti pak doplníme $\mathbf{t}$ na orthonormální (Frenetův) repér vektory $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/||\mathbf{t}'||$ a $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. V tuto chvíli přichází klíčové tvrzení, které je zároveň větou (Frenetovou) a definicí,

totiž že existuje jediná funkce τ (nazývaná torze) taková, že platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Důkaz této věty je v literatuře často zastřen speciálními vlastnostmi Frenetova repéru. Je lépe pochopitelný, uvažujeme-li obecný pohyblivý ON repér $\{\mathbf{v}_1(s), \mathbf{v}_2(s), \mathbf{v}_3(s)\}$. Jeho okamžitá změna vyjádřená opět v tomto repéru je vyjádřena maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

kde α, β, γ jsou reálná čísla. Důkaz je přímočarý, neboť $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$ a tedy $0 = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)' = \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j'$. Matice v (6) tedy antisymetrická, čímž jsme mimochodem určili Lieovu algebru speciální orthonormální Lieovy grupy.

V případě Frenetova repéru dostáváme z definice vektoru $\mathbf{n}$, že $\beta = 0$ a $\alpha = \kappa$. Zbývající funkce γ je pak označna jako τ a nazývána torze. Význam Frenetovy věty je obrovský, je v ní shrnuta celá lokální teorie křivek. Z pohybu Frenetova repéru je možno pochopit geometrický význam křivosti a torze. Zároveň z příslušných diferenciálních rovnic plyne, že κ a τ určují křivku jednoznačně až na přímou shodnost. Takto určená křivka existuje a je možno jí s pomocí Frenetovy věty lokálně kanonicky rozvinout

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + \mathbf{t}(s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + \ldots) + \mathbf{n}(\frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa'}{6}s^3 + \ldots) + \mathbf{b}(\frac{\kappa\tau}{6}s^3 + \ldots). \tag{7}$$

Významné jsou ale i další případy pohyblivých repérů, zejména když $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$ a navíc v (6) předpokládáme, že $\gamma = 0$, dostáváme repér s minimální rotací. Takovým příkladem je například volba

$$\mathbf{v}_2 = (\cos\phi)\mathbf{n} + (\sin\phi)\mathbf{b},$$

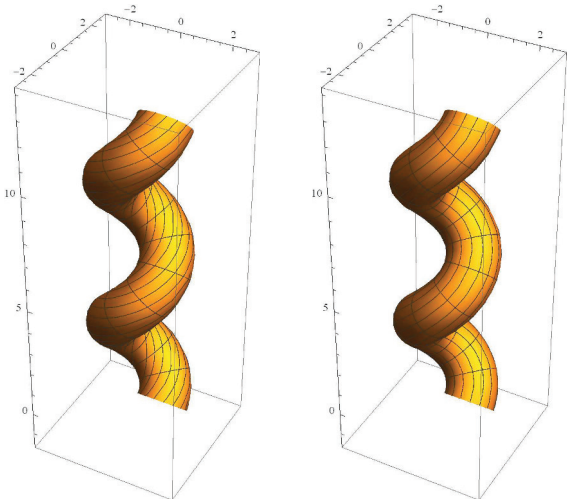
kde $\phi = -\int \tau$. Tento repér má velký teoretický výnam, protože je příkladem paralelního přenosu (podél křivky) a rovněž velký význam pro aplikace. Pro ně je totiž Frenetův repér nevhodný, jak je patrné z následujícího příkladu.

Pro danou křivku $\mathbf{c}(t)$ můžeme parametrizovat trubicovou plochu o poloměru r s křivkou $\mathbf{c}(t)$ jako páteřní křivkou dvěma následujícími způsoby

$$\mathbf{p}_1(t,\theta) = \mathbf{c}(t) + (\cos\theta)\mathbf{n}(t) + (\sin\theta)\mathbf{b}(t) \tag{8}$$

$$\mathbf{p}_2(t,\theta) = \mathbf{c}(t) + (\cos\theta)\mathbf{v}_1(t) + (\sin\theta)\mathbf{v}_2(t). \tag{9}$$

Ve druhém případě dostaneme lepší kvalitu parametrických čar - viz Obr. 2.



Obrázek 2: Dvě různé parametrizace trubicové plochy. Nalevo s využitím Frenetova repéru, napravo s využitím repéru s minimální rotací.

Na závěr této části chceme zmínit, že náš přístup nám umožňuje velmi elegantní a systémový důkaz formulí pro křivost a torzi v obecné parametrizaci

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}) \cdot \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

V parametrizaci obloukem tyto formule platí triviálně a zároveň snadno nahlédneme, že tyto výrazy jsou invariantní vůči reparametrizacím díky formulím (5).

5 Křivky v geometrickém modelování

V nejrůznějších aplikacích není praktické uchovávat celou parametrizaci křivek. Namísto toho je křivka reprezentována pouze koeficienty vůči vhodné bázi. V ideálním případě mají tyto koeficienty geometrický význam (řídící polygon).

Jako dobrý úvod do této problematiky se nám osvědčilo studium C^1 Hermitovské interpolace. Hledáme křivku $\mathbf{c}(t)$ tak, aby na intervalu $t \in [0, 1]$ interpolovala koncové body a tečné vektory. Řešíme tedy rovnice

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{c}(1) = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{c}'(0) = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{c}'(1) = \mathbf{V}_1. \tag{10}$$

Nejprve hledáme kubickou $\mathbf{c}(t)$ v monomiální bazi $\mathcal{M} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Křivku tedy napíšeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$$

a koeficienty $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ pak dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{pmatrix}.$$

Existuje taková baze $\mathcal{F} = \{f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$, ve které bude mít problém jako řešení

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{P}_0 f_0(t) + \mathbf{P}_1 f_1(t) + \mathbf{V}_1 f_2(t) + \mathbf{V}_2 f_3(t)?$$

Jinými slovy, odpovídající soustava lineárních rovnic má jednotkovou matici? Je snadné nahlédnout, že výše uvedená matice musí být maticí přechodu $[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}$ od monomiální báze k této ideální (Fergusonově) bazi a tedy dostáváme

$$[id]_{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy Fergusonovu bazi máme vyjadřenu vůči monomiální bazi ve sloupečcích této poslední matice a tedy

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ f_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ f_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ f_3(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned}$$

Za archetyp geometrického modelování je však třeba považovat Bézierovy křivky, tedy polynomální křivky vyjádřené v Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše n

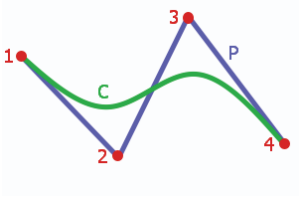
$$\mathcal{B}_n = \{B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\},$$

kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$. Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{n}^{i=0} \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ jsou kontrolní body.

Výklad teorie Bézierových křivek je standartní a dobře zpracovaný v literatuře. Za zmínku ovšem stojí, že Bernsteinovy polynomy byly poprvé použity



Obrázek 3: Bézierova kubika a její řídící polygon.

ke konstrukčnímu důkazu Weierstrassovy věty. Jsou úzce spojeny s teorií pravděpodobnosti, neboť $\binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)}$ je pravděpodobnost, že jev který má pravděpodobnost t nastane z n opakování právě i krát. Z toho ihned plyne nenulovost polynomů na intervalu $[0,1]$ a to, že jsou rozkladem jednotky.

Od Bézierových křivek, které jsou jakýmsi ideálem geometrického modelování chceme přejít ke skutečně významným objektům pro aplikace, kterými jsou NURBS [4]. Za tímto účelem musíme udělat tři kroky: přejít ke splajnům, přejít k racionálním křivkám a přejít od křivek k plochám.

Teorie B-splajnů je často vykládána bez náležité vazby na lineárním algebru. Naším základním pohledem je, že máme-li dáno uzlové dělení $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ kde $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_m$, definujme prostor funkcí $\mathcal{P}_p(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ obsahující funkce $f : [u_0, u_m] \to \mathbb{R}$, které mají na celém intervalu $[u_0, u_m]$ spojitou $(p-1)$ derivaci a zůžené nakaždý inteval $[u_i, u_{i+1}]$ jsou to polynomy stupně p. Jedná se zjevně o vektorový prostor, jakou má dimenzi? A je elegantním jevem geometrického modelování, že je možno rekurzivně sestrojit posloupnost funkcí stupně p

$$N_{i,0}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{array} \right\} \tag{11}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t), \tag{12}$$

která tvoří bázi (B-spline) tohoto protoru funkcí (ovšem zúžených na interval $[u_p, u_{m-p}]$).

Přechod k racionálním křivkám je možno vyložit na příkladu Bernsteinovy báze s tím, že pro B-spine bázi je konstrukce analogická. Z matematického pohledu je přirozené racionální Bézierovy křivky chápat jako afinní verze polynomiálních křivek. Z důvodů geometrického modelování je však nutné, aby zároveň řídící polygon byl afinní verzí projektivního řídícího polygonu. Z toho důvodu se váhy objevují nejen na poslední (homogenizující) souřadnici, ale jsou jimi přenásobeny všechny souřadnice. Uvažujeme tedy polynomiální křivku s

řídícími body $w_i[\mathbf{P}_i, 1]$, jejíž afinní verze má tvar

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}. \tag{13}$$

V tuto chvíli je vhodné připomenout reparametrizaci (4), pomocí níž dostaneme reparametrizovanou křivku $\mathbf{c}(s)$, která má tytéž řídící body, ale váhy $(\tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_n)$, kde $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$. Důkaz je přímočarý

$$B_i^n(t(s)) = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n}$$

a tedy i

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^{n} \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i B_i^n(s)}.$$

Z toho vyplývá, že každou racionální křivku můžeme reparametrizovat tak, aby první a poslední váha byla rovna 1. Tohoto vyjádření se využívá zvláště v případě kuželoseček.

6 Závěr

V našem příspěvku jsme se pokusili ukázat, jak některé základní pojmy z teorie křivek můžeme využívat jak k teoretickému výkladu, tak k aplikacím. Při výuce je velmi vhodné tyto pohledy kombinovat. V našem příštím příspěvku se chceme podobně věnovat teorii ploch.

Literatura

[1] M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976

[2] G. Farin, J. Hoschek, M. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design* Elsevier, 2002

[3] J. Hoschek, D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design* A. K. Peters, 1993

[4] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book,* Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, 1997

[5] A. N. Pressley: *Elementary Differential Geometry* Springer 2010