

Isogeometrická analýza nad optimalizovanými křivočarými triangulacemi

Kateřina Čech Dobiášová, Zbyněk Šír

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

kacedobi@gmail.com

Matematický ústav UK, MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

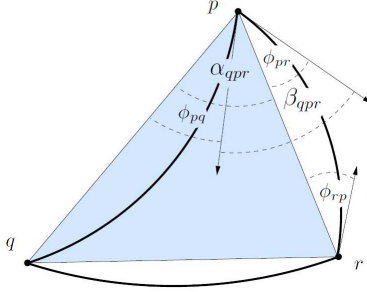
zbynek.sir@mff.cuni.cz

Abstrakt. Isogeometrický přístup k metodě konečných prvků spočívá v užití téže báze funkcí pro parametrizaci oblasti, na které je úloha řešena a pro popis řešení. V současnosti se využívá téměř výhradně báze tensor-product Bernsteinových polynomů. V našem příspěvku popisujeme alternativní přístup založený na trojúhelníkových Bernsteinových polynomech dvou proměnných. Díky tomu získáváme možnost lepšího srovnání s klasickou FEM založenou na přímočaré triangulaci. Používáme postupně tři typy bazových funkcí: kvadratické polynomiální, kvadratické racionální s přídavnou podmínkou vynucující kruhové hranice trojúhelníků a konečně kubické polynomiální bazové funkce. Pro všechny typy bazových funkcí provádíme optimalizaci parametrizace oblasti, přičemž vycházíme z dané přímočaré triangulace. Srovnání užití různých bazových funkcí představujeme na jednom numerickém příkladě.

Klíčová slova: konečné prvky, konvexní optimalizace, isogeometrická analýza, Bézierův trojúhelníkový plát

1 Úvod

V článku se budeme zabývat aplikací obloukových triangulací v metodě konečných prvků. Metoda konečných prvků je numerická metoda pro hledání přibližného řešení parciálních diferenciálních rovnic. Pomocí obloukových trojúhelníků optimalizujeme parametrizaci oblasti. Tuto optimalizovanou parametrizaci oblasti popíšeme stejnou bází funkcí jakou použijeme pro popsání řešení, což je podstata isogeometrické analýzy. Rozšíříme optimalizaci triangulace pomocí kruhových oblouků [1] na optimalizaci pomocí parabolických a kubických oblouků. V případě kruhových oblouků jsme vázáni podmínkou, že odchylka oblouku od původní hrany musí být u obou vrcholů shodná, aby tyto úhly definovaly kruhový oblouk nad touto hranou. Pokud uvažujeme parabolické hrany, mohou být tyto odchylky různé, avšak oblouk nesmí hranu protnout, proto jsou odchylky vázány podmínkou shodného znaménka. Získáme tedy více stupňů volnosti a minimální úhel v trojúhelnících potom může být lépe optimalizován. Konečně uvažujeme kubické hrany. Odchylky v koncových bodech jedné hrany nejsou svázány žádnou podmínkou. Po optimalizaci úhlů v triangulaci dojde k nejlepšímu možnému rozložení velikostí úhlů.



Obrázek 1: Konstrukce obloukového trojúhelníka

2 Optimalizace parametrizace oblasti

Mějme přímočarou triangulaci τ v dané oblasti Ω v rovině. Optimalizace úhlů je formulována následovně:

Nahradíme každou vnitřní hranu v τ obloukem (kruhovým, parabolickým, či kubickým) tak, aby nejmenší úhel byl v nové triangulaci τ^* maximalizován. Výsledná optimální triangulace τ^* nemůže obsahovat záporné úhly a pořadí hran zůstává též zachováno, proto je úloha správně definována a nehrozí křížení hran v nové triangulaci (viz [1]).

Pro kruhové a kubické oblouky zformulujeme optimalizaci triangulace jako lineární program, pro kubické oblouky jako nelineární program.

Pro každou rovnou hranu, která spojuje body p, r v triangulaci τ zavedeme dvě proměnné ϕ_{pr} a ϕ_{rp} . Proměnná ϕ_{pr} představuje úhel, který svírá oblouk \widehat{pr} s hranou pr u bodu p a ϕ_{rp} u bodu r (obr.1).

Pro každou hranu v τ , která leží na hranici $\delta\Omega$, zafixujeme obě odchylky s ohledem na $\delta\Omega$.

Pro optimalizaci pomocí lineárního (resp. nelineárního) programování vytvoříme vstupní nerovnosti. Úhly mezi oblouky v optimalizované triangulaci označíme β_{qpr} a jejich velikost vyjádříme pomocí úhlů $\alpha_{qpr} = \angle qpr$, které označují úhly mezi hranami v původní triangulaci, a pomocí úhlů ϕ_{pr} a ϕ_{pq} .

Vyjádříme úhel β_{qpr} mezi dvěma oblouky

$$\beta_{qpr} = -\phi_{pq} + \alpha_{qpr} + \phi_{pr}.$$

Položme $\delta \leq \beta_{qpr}$. Pro každý úhel optimalizované triangulace vytvoříme tuto nerovnici. Všechny nerovnice vytvoří soustavu lineárních nerovnic S . Pro různé typy oblouků přidáme další podmínky.

Kruhové hrany

Aby byl oblouk u hrany pr kruhový, musí být úhly ϕ_{pr} a ϕ_{rp} u každé hrany pr shodné. Vytvoříme soustavu nerovnic S_1 tak, že pro každou hranu pr provedeme substituci $\phi_{rp} = \phi_{pr}$ v soustavě S . Protože je systém nerovnic S_1 lineární budeme optimalizovat pomocí lineárního programování a použijeme lineární funkci $L_1 = \delta$.

Parabolické hrany

V případě, že požadujeme, aby oblouky v optimalizované triangulaci byly parabolické, není potřeba, aby úhly u jedné hrany byly shodné. Je potřeba zajistit, aby oba úhly ϕ_{pr} a ϕ_{rp} byly na stejné straně hrany, tedy, aby měly shodná znaménka. Soustavu nerovnic S_2 vytvoříme přidáním vhodných nerovnic k soustavě S . Pro každé takové dva úhly u jedné hrany přidáme nerovnici $\phi_{rp} \cdot \phi_{pr} \geq 0$. Soustava nerovic S_2 je již nelineární a pro optimalizaci musíme použít nelineární programování. Nelineární funkce L_2 bude $L_2 = \delta$.

Kubické hrany

Pro kubické hrany nemusíme omezovat úhly ϕ_{pr} a ϕ_{rp} žádnou podmínkou. Použijeme lineární programování se systémem nerovnic S a lineární funkci $L_3 = \delta$.

Optimalizací získáme hodnoty úhlů ϕ_{pr} a ϕ_{rp} , které určují úhly v nové triangulaci τ^* . V případě kruhových hran jsou hrany přesně určeny jen pomocí úhlů ϕ_{pr} a ϕ_{rp} . Pokud jsou tyto dva úhly nulové, zůstane hrana rovná. V případě parabolických a kubických hran nejsou přesně oblouky hran určeny. Známe pouze úhel, který má oblouk svírat s odpovídající hranou původní triangulace τ . Přesné určení oblouků provedeme dle potřeby při aplikaci optimalizované triangulace. Pokud jsou oba úhly nulové je hrana v τ^* shodná s odpovídající hranou v τ .

Dále může nastat, že úhel $\phi_{pr} = 0$ a zároveň úhel $\phi_{rp} \neq 0$. Tyto hodnoty neurčují ani rovnou hranu avšak ani parabolickou či kubickou hranu. Abychom zachovali nenulový úhel, změníme nulový úhel na nějakou nízkou hodnotu, která příliš nezmění velikost výsledného úhlu β_{qpr} a která nám umožní reprezentovat hranu jako oblouk.

V optimalizaci triangulací pomocí parabolických a kubických hran je možné stejným způsobem aplikovat další podmínky popsané v článku [1], jako je omezení součtu vnitřních úhlů v jednotlivých trojúhelnících, prohazování hran, minimalizace největšího úhlu, atd.

3 Metoda konečných prvků a isogeometrická analýza

Princip metody konečných prvků sestává ze dvou základních kroků. Prvním je přepis zadané úlohy do odpovídající slabé formy. V druhém kroku slabou formu diskretizujeme v konečně dimenzionálním prostoru.

Řešme například Poissonovu úlohu, kde k dané funkci f na oblasti Ω hledáme funkci u tak, aby

$$\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \text{ v } \Omega,$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ je Laplaceův operátor.

Vhodnými úpravami získáme tak zvanou slabou formulaci úlohy. V té máme nalézt $u(x_1, x_2) \in C^1$

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

pro všechny testovací funkce $v \in C^1$, $v = 0$ na $\delta\Omega$.

V druhém diskretizačním kroku nahradíme prostor C^1 konečně dimenzionálním podprostorem V . Máme nalézt $u(x_1, x_2) \in V$

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

pro všechny testovací funkce $v \in V$, $v = 0$ na $\delta\Omega$, kde $V \subset C^1$.

Po tomto diskretizačním kroku získáváme konkrétní vztahy pro velký, ale konečně dimenzionální lineární problém, jehož řešení aproximuje řešení původní úlohy. Existuje mnoho způsobů jak volit podprostor V . Klasická MKP obvykle volí tento prostor jako prostor po částech lineárních nebo polynomiálních funkcí nad přímočarou triangulací funkcí.

V isoparametrickém přístupu k metodě konečných prvků je oblast popsána souborem základních prvků P_i , kde každý je obrazem např. trojúhelníku Δ_i při zobrazení G_i . Přesněji, množina bázových funkcí ψ_{ij} , které definují prostor V je na Δ_i definováno takto:

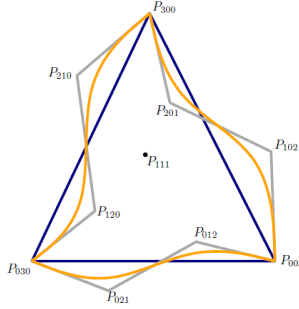
$$G_i = \sum \psi_{ij} c_{ijj}.$$

Koeficienty c_{ij} jsou obvykle odvozeny z vrcholů a středů hran základních prvků. Testovací funkce získáme složením bázových funkcí s inverzním zobrazením

$$f_{ij} = \psi_{ij} \circ G_i^{-1}.$$

Vhodným souborem funkcí definovaných na sousedních trojúhelnících získáme spojité testovací funkce.

Každý obloukový trojúhelník můžeme reprezentovat jako Béziéřův trojúhelník. Bázové funkce jsou Bernsteinovy bázové funkce. Předpokládáme, že takový trojúhelník je ve standartní formě, tedy že váhy ve vrcholech jsou rovny jedné. Libovolnou obloukovou triangulací můžeme takto použít



Obrázek 2: Řídící body pro kubické hrany

pro metodu konečných prvků. V případě kruhových hran reprezentujeme obloukový trojúhelník jako racionální kvadratický Béziérův trojúhelník.

Trojúhelník s parabolickými hranami reprezentujeme jako kvadratický Béziérův trojúhelník. Řídící body mezi vrcholy leží na průsečících tečen z vrcholů k obloukovým hranám. Váhy v těchto bodech volíme rovny jedné.

Trojúhelník s kubickými hranami reprezentujeme jako kubický Béziérův trojúhelník. Pro tuto reprezentaci musíme vhodně zvolit řídicí body $P_{102}, P_{201}, P_{210}, P_{120}, P_{021}, P_{012}$ (obr. 2). Abychom zachovali odchylku ϕ od původních hran získané optimalizací, musí tečny k oblouku svírat s původní hranou tuto odchylku ϕ . Řídící body tedy volíme na těchto tečnách. Dále musíme zvolit řídicí bod P_{111} tak, aby trojúhelníkový Béziérův plát byl regulární. Nejdříve tento řídicí bod zvolíme v těžišti původního trojúhelníka. Pokud tento bod nevyhovuje, volíme dále body na těžnicích blíže k vrcholům dokud nezískáme bod, který určuje spolu s ostatními řídicími body regulární Béziérův trojúhelníkový plát.

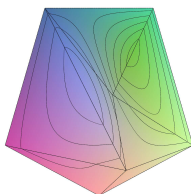
4 Numerický příklad

Mějme oblast Ω , jejíž hranici $\delta\Omega$ tvoří jednotková kružnice a na této oblasti mějme triangulaci τ . Tuto triangulaci optimalizujeme vzhledem k úhlům pomocí metody popsané v části 1. Tabulka níže ukazuje velikosti nejmenších a největších úhlů v původní triangulaci a v triangulacích optimalizovaných pomocí kruhových, parabolických a kubických oblouků. Všechny triangulace jsou znázorněny na obrázcích 3-6.

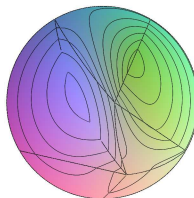
Uvažujeme funkci $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \cos(x + 1) \sin(y)$ na jednotkovém kruhu splňující homogenní Dirichletovu hraniční podmínku. Aproximujeme ji konečnými prvky odvozenými z obloukových triangulací s kruhovými, parabolickými a kubickými hranami. Použijeme vyhovující

kvadratické racionální, kvadratické polynomiální a kubické funkce konečných prvků.

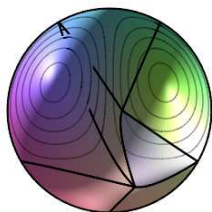
Výsledek je ukázán na obrázcích 3 – 6. Tabulka uvádí porovnání chyb pro jednotlivé optimalizované triangulace i pro původní přímočarou triangulaci. Poznamenejme, že mnohem lepší chyba pro kubické hrany vzniká také tím, že testovací funkce jsou kubické oproti ostatním kvadratickým.



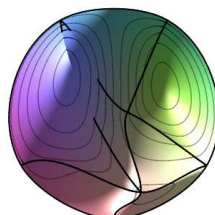
Obrázek 3: Klasická triangulace



Obrázek 4: Kruhové hrany



Obrázek 5: Parabolické hrany



Obrázek 6: Kubické hrany

	rovné	paraboly	kružnice	kubiky
nejmenší úhel	10,92	27,869	21,16	47,36
největší úhel	157,08	128	137,67	90,00
maximální chyba	0,22	0,1858	0,1433	0,0725
L2 chyba	0,18	0,00814	0,00709	0,000939

5 Závěr

V tomto článku jsme představili alternativní metodu pro isogeometrickou analýzu. Vycházíme z dané přímočaré triangulace dané oblasti a úsečky nahradíme polynomiálními křivkami druhého nebo třetího stupně. Přitom

optimalizujeme úhly této křivočaré triangulace. Vnitřky vznikých křivočarých trojúhelníků pak přirozeně parametrizujeme Bézierovými pláty a tuto parametrizaci využijeme k řešení PDE metodou isogeometrické analýzy. Počáteční numerické testy ukazují, že takto optimalizovaná geometrická parametrizace přináší přesnější řešení dané PDE. V budoucnu chceme studovat optimalizaci kubických plátů z hlediska absence skoro singulárních bodů a dále metody pro zajištění vyšší spojitosti spočítaného řešení.

Reference

- [1] O. Aichholzer, W. Aigner, F. Aurenhammer, K. Čech Dobiášová, B. Jüttler. *Arc triangulations*. In Proc. 26th European Workshop on Computational Geometry EuroCG 2010, 17-20.
- [2] J. Shewchuk. *What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures*. Proc. 11th International Meshing Roundtable, 2002, 115-126.
- [3] T.J.R Hughes. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Reprint, Dover Publications, New York.
- [4] Victoria Germandez-Mederos, Jorge Estrada-Sarlabous, Dionne Leon Madrigal *On local injectivity of 2D triangular cubic Bezier functions*, Revista Investigación Operacional 01/2006; 27(3):261-275.
- [5] M. Randrianarivony, G. Brunnett *Sufficient and necessary conditions for the regularity of planar Coons maps*, 2004.
- [6] Michael S. Floater, Jiří Kosinka *On the injectivity of Wachspress and mean value mappings between convex polygons*, Advances in Computational Mathematics (Impact Factor: 1.47). 04/2012; 32(2):163-174.
- [7] Kateřina Čech Dobiášová, Zbyněk Šír *Triangulace pomocí kruhových oblouků a metoda konečných prvků*, Sborník 32. Konference o geometrii a počítačové grafice