9. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit počítání bází a dimenzí podprostorů

Základní příklady:

1. Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ dimenze prostorů $\operatorname{Im} \mathbf{A}$, $\operatorname{Im} \mathbf{A}^T$, $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$, $\operatorname{Ker} \mathbf{A}^T$.

2. Nechť $U = \langle (2,-1,1,1)^T, (4,1,5,1)^T, (1,-2,-1,1)^T, (1,1,2,0)^T \rangle$ je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$. Spočítejte dimenzi U a najděte bázi takového podprostoru V, aby $U \cap V = 0$ a $U + V = \mathbb{Q}^4$.

3. Určete dimenzi podprostoru U reálného lineárního prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$, jestliže

(a) $U = \langle x+1, x-2, x^2-x+3, x^2+1 \rangle$,
(b) $U = \langle x^6+1, x^9+x^3, x^3 \rangle$,
(c) $U = \langle x^3+x^2-x+2, x^3+5x^2+x+4, x^3-x^2-2x+1, 2x^2+x+1 \rangle$,
(d) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] |\; p(0) = 0, \deg p < 5\}$,
(e) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] |\; p(1) = 0, \deg p < 5\} \cap \{p \in \mathbb{R}[x] |\; p(3) = 0, \deg p < 5\}$,

4. Pro $X = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ podmnožinu lineárního prostoru $\mathbb{Z}_2^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ dokažte, že $\dim\langle X \rangle = 4$ a vyberte z X bázi $\mathbb{Z}_2^4$.

Obtížnější příklady:

5. Uvažme posloupnost reálných funkcí $M = (\cos, \sin, \cos^2, \sin^2)$.

(a) Dokažte, že M je báze podprostoru $\langle M \rangle$ lineárního prostoru všech reálných funkcí,
(b) dokažte, že $1, \cos 2x \in \langle M \rangle$,
(c) určete souřadnice vektorů 1, $\cos 2x$ a $3 + 2\cos x - \cos 2x$ vzhledem k bázi M.

Úlohy k zamyšlení:

6. V racionálním lineárním prostoru polynomů s racionálními koeficienty najděte bázi podprostoru všech nenulových racionálních polynomů stupně nejvýše 6, jejichž kořenem je komplexní číslo $5 - i$.

Řešení:

1. nad $\mathbb{R}$: 3, 3, 1, 0, nad $\mathbb{Z}_5$: 2, 2, 2, 1, nad $\mathbb{Z}_7$: 2, 2, 2, 1.
2. 2, např. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.
3. (a) 3, (b) 3 (c) 2, (d) 4, (e) 3.+
4. Např. $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\}$.
5. (c) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\4\\2\end{pmatrix}$.
6. Položme $f = x^2 - 10x + 26$, pak bázi tvoří např $(f, xf, x^2f, x^3f, x^4f)$.