8. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit pojem lineární nezávislosti a hledání bází
- motivovat hledání souřadnic vzhledem k bázi

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ rozumíme jednoznačně určený aritmetický vektor $(a_1, \ldots, a_n)^T$, pro který $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$.

Základní příklady:

1. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů X v lineárním prostoru V lineárně závislá či nezávislá, jestliže

(a) $X = ((1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T)$ a $V = \mathbb{Q}^4$,
(b) $X = ((1,1)^T, (1,0)^T, (3,4)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_7^2$,
(c) $X = ((1,1,2)^T, (2,0,1)^T, (2,1,1)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_3^3$,
(d) $X = (1+i, 2-3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$,
(e) $X = (1+i, 2-3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{C}$,
(f) $X = (x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2)$ a $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

2. Pro matici $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ najděte báze prostorů $\operatorname{Im}\mathbf{A}$, $\operatorname{Im}\mathbf{A}^T$, $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$, $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T$ jestliže

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } \mathbf{A} = \mathbf{I}_n, \quad \text{(c) } \mathbf{A} = \mathbf{0}_{n\times m}.$$

3. Najděte nějakou bázi podprostoru U lineárního prostoru V, jestliže

(a) $U = \langle (2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T \rangle$ pro $V = \mathbb{Z}_5^4$,
(b) $U = \langle (2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T \rangle$ pro $V = \mathbb{Z}_5^4$,
(c) $U = \langle (1,1,3,6)^T, (5,5,1,0)^T, (3,3,2,6)^T \rangle$ pro $V = \mathbb{Z}_7^4$,
(d) $U = \langle x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2 \rangle$ pro $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

4. Ověřte, že je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ a spočítejte souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{Q}^3$ vzhledem k bázi M, jestliže

$$\text{(a)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Ověřte, že $B = (3-i, 1-2i)$ tvoří bázi lineárního prostoru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a spočítejte souřadnice vektoru i.

Obtížnější příklady:

6. Vyberte z posloupnosti $X = ((0,0,0,0)^T, (3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T)$ bázi podprostoru $\mathbf{U} = \langle X \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a doplňte ji bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^4$.

Úlohy k zamyšlení:

7. Najděte nenulový racionální polynom stupně (nejvýše) 3, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$.

Řešení:

1. (a) LN, (b) LZ, (c) LZ, (d) LN, (e) LZ, (f) LZ.
2. Postupně $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}^T$:
   (a) např. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right)$, $\emptyset$, $\left(\begin{pmatrix}-7\\2\\3\end{pmatrix}\right)$.
   (b) (např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\3\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
   (c) $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\emptyset$, $\emptyset$,
   (d) $\emptyset$, $\emptyset$, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.
3. (a) $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\end{pmatrix}\right)$, (b) $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\end{pmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\right)$, (d) (x^2+x+1, x^2+2x).
4. (a) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.
5. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.
6. $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$ je báze U a např. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ji doplňuje na bázi $\mathbb{Z}_7^4$.
7. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$