

5. cvičení z lineární algebry – doplňující úlohy

Tyto úlohy vznikly jako doplňující úlohy k pátému cvičení. Mohou být užitečné zejména pro studenty, kteří mají potíže s “oficiálními” příklady z 5. cvičení (zejména s prvním příkladem).

Cíle úloh:

- procvičit si práci se zobrazeními určenými maticí
- procvičit si práci se sloupcovým pohledem na lineární rovnice (viz skriptka 2.5.2)
- pochopit souvislost mezi řešením soustav lineárních rovnic a hledáním vzoru zobrazení daného maticí

Základní příklady:

Před řešením úloh si připomeňte kapitolku 2.5.2 ve skriptech a také definici součinu matice s vektorem (důležité je, že výsledek je lineární kombinace sloupců matice).

1. Najděte matici \mathbf{A} zobrazení $f_{\mathbf{A}}$ (definovaného $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$), víte-li, že:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f_{\mathbf{A}} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Pro následující matice jednoduchých lineárních zobrazení v rovině:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(a) Určete, kam se zobrazí vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(b) Určete, kam se zobrazí jednotkový čtverec $[0, 1]^2$

(c) Popište zobrazení slovy.

(d) Určete, zda je zobrazení prosté, zda je na.

(e) Najděte úplné vzory vektorů (tj. všechny vektory, které se zobrazí na) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(g) Určete obor hodnot a jádro zobrazení.

Úlohy k zamyšlení:

3. Může být zobrazení určené maticí $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ prosté, ale ne na? A může být na, ale ne prosté? A co s maticí $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, nebo $\mathbb{R}^{2 \times 3}$?

Řešení:

1. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$