5. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit si práci se zobrazeními určenými maticí,
- naučit se pro regulární matice hledat inverzní matice a rozklad na součin elementárních matic.

V následujícím značíme $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{M}\mathbf{v}$ pro matici $\mathbf{A}$.

Základní příklady:

1. Uvažujme matici $\mathbf{M}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Spočítejte jádro matice $\mathbf{M}$ (zobrazení $f_{\mathbf{M}}$) a najděte úplný vzor vektoru $\mathbf{v}$, jestliže

a) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Spočtěte n-tou mocninu reálných matic $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Pro racionální matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Dokažte, že je $f_{\mathbf{A}}$ bijekce a najděte matici $\mathbf{B}$, pro niž platí $f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}$.

4. Existuje-li, najděte matici $\mathbf{X}$ splňující

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_3$ nad $\mathbb{R}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_4$ nad $\mathbb{Z}_2$.

5. Rozhodněte, které z následujících matic jsou regulární.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5$, (b) $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$

6. K regulárním maticím z předchozí úlohy najděte jejich inverzní matice a napište je jako součin elementárních matic.

Obtížnější příklady:

7. Rozhodněte, pro která a z tělesa je matice $\mathbf{A}_a$ regulární a pro tato a spočítejte $\mathbf{A}_a^{-1}$.

(a) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a-1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (b) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Úlohy k zamyšlení:

8. Najděte takové tři matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, aby součin libovolných dvou nebyl nula a součin všech tří byl nulová matice.

Řešení:

1. a) $\operatorname{Ker} f_{\mathbf{M}} = \{s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\}$, $f_{\mathbf{M}}(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix})^{-1} = \{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_{\mathbf{M}}\}$

   b) $\operatorname{Ker} f_{\mathbf{M}} = \{s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\}$, $f_{\mathbf{M}}(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix})^{-1} = \{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\4\end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_{\mathbf{M}}\}$.

2. $\begin{pmatrix}3^n & 0 & 0\\ n3^{n-1} & 3^n & 0\\ \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & n3^{n-1} & 3^n\end{pmatrix}$, $(-1)^n \cdot \begin{pmatrix}1 & -n & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix}-13 & -2 & 5\\ 8 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

5. vše regulární kromě a) nad $\mathbb{Z}_5$.

6. a) $\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

   b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2-4i & i-1\\ 2i-2 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\1-i&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+i&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{1-i}{2}\\0&1\end{pmatrix}$,

   c) $\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&4\\1&6&2\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

7. a) $\mathbf{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ a^{-1} & 4a^{-1}\end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$

   b) $\mathbf{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix}a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1}\\ 0 & 2 & 3\\ \frac{4}{a^2} & \frac{a+2}{a^2} & \frac{3}{a^2}\end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.

8. Například $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.