4. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit výpočet řešení soustavy lineárních rovnic nad konečnými tělesy,
- naučit se počítat s maticemi nad tělesy.

Základní příklady:

1. Spočítejte v tělese $\mathbb{Z}_7$ hodnoty 3^{-1}, 4^{-1}, 6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3$ a najděte parametrický popis množiny všech řešení rovnice $3x + 2y + z = 2$.

2. Spočítejte v tělese $\mathbb{Z}_p$ pro prvočíslo $p > 1$ hodnoty 2^{-1} a $(p-1)^{-1}$.

3. Najděte nad tělesy $\mathbb{Z}_5$ (případně nad $\mathbb{Z}_7$) všechna řešení soustav rovnic s maticí

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$, b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$, c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$, d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$.

4. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

(b) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, a $5 \cdot \mathbf{C} \cdot$.

(c) Spočítejte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A}$.

Obtížnější příklady:

5. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úlohy k zamyšlení:

6. Uvažujte teleso $\mathbb{Z}_p$ (p je prvočíslo). Platí vždy, že $\forall a, b \neq 0\ \exists c$ takové, že $a = bc$? Proč?

7. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a definujme zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ a $f_{\mathbf{B}} : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ předpisy $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ a $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v}$

(a) Rozhodněte, zda jsou prostá či na zobrazení $f_{\mathbf{A}}$ a $f_{\mathbf{B}}$.

(b) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (0,0)^T$

(c) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (1,2)^T$

(d) Najděte všechny matice $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro níž $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{I}_2$,

(e) najděte všechny matice $\mathbf{Y}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro níž $\mathbf{Y}\mathbf{B} = \mathbf{I}_3$.

Řešení:

1. $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $6^{-1} = 6$ a $(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3 = 0$,

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_7 \}.$$

2. $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$ a $(p-1)^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = p - 1$.

3. Nad $\mathbb{Z}_5$: a) $\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5 \}$ b) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5 \}$ c) $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \}$,

d) $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \}$.

4. Nad $\mathbb{R}$ (v $\mathbb{Z}_p$ stačí upravit modulo p):

a) $\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$,

5. a) $\{ \begin{pmatrix} 4c & 2+4d \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{Z}_7 \}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

6. a) $f_{\mathbf{A}}$ ani $f_{\mathbf{B}}$ není prosté, $f_{\mathbf{A}}$ není, zatímco $f_{\mathbf{B}}$ je na, b) $\{ t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \}$, d) $\{ \begin{pmatrix} 4s+1 & 4t \\ s+4 & t+1 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \}$, e) $\emptyset$.