

## Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2015–2016

(11.1) Determinant reálné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x & -2x \\ -3x & 3 & x & 2 \\ 4 & \pi & x & 5 \\ e & x & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je polynom v proměnné  $x$ . **Přímo z definice determinantu** najděte koeficienty tohoto polynomu u  $x^4$  a  $x^3$  (tj. nesmíte např. vypočítat celý determinant nějakou jinou metodou a pak se podívat na koeficienty).

(11.2) Permutace  $\alpha, \beta \in S_9$  jsou dány redukováním cyklickým zápisem.

$$\alpha = (3\ 1\ 2\ 6)(4\ 9\ 5), \quad \beta = (5\ 1\ 3\ 8)(2\ 6\ 7)$$

- (a) Dokažte, že pro libovolnou permutaci  $\pi \in S_9$  je redukováný cyklický zápis permutace  $\pi\alpha\pi^{-1}$  tvaru  $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)(x_5\ x_6\ x_7)$ . (Nápověda: kam se zobrazí  $\pi(1)$ ?)
- (b) Určete počet permutací  $\pi \in S_9$ , pro které platí  $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$ .

**Poznámka:** Po vyřešení bodu (a) vás asi napadne, že permutace  $\pi\alpha\pi^{-1}$  a  $\alpha$  mají obecně vždy stejný „cyklický typ“ – v zápisu pomocí nezávislých cyklů mají stejný počet cyklů každé délky. Permutace  $\pi\alpha\pi^{-1}$  se nazývá konjugovaná permutace k permutaci  $\alpha$ . Konjugování lze využít například na vyřešení Rubikovy kostky: Označme  $\alpha$  permutaci odpovídající pootočení horní stěny o 90 stupňů a  $\pi$  permutaci, která prohazuje dva sousední hranové kostičky v horní stěně a všechny ostatní kostičky v horní stěně nechává na místě (ostatní kostičky můžeme promíchat libovolně). Takový tah  $\pi$  asi umí nalézt téměř každý, kdo si nějakou dobu s Rubikovou kostkou hrál. Po vyřešení části (a) by neměl být problém si rozmyslet, co udělá tah  $\pi\alpha\pi^{-1}$ , a pak tah  $\alpha^{-1}\pi\alpha\pi^{-1}$ . Zjistíte, že druhý tah cyklicky rotuje tři hranové kostičky a všechny ostatní kostičky nechává na místě. Těmito tahy lze přesunout všechny hranové kostičky na správné místo. Podobným trikem lze vymyslet tahy, které umožní přesunout rohové kostičky na správné místo, a také opravit orientaci rohových a hranových kostiček.

**Bonusový problém:** Následující úloha je algebraickým jádrem skutečnosti, že rovnice pátého stupně jsou obecně neřešitelné.

Označme  $A_n$  množinu všech sudých permutací v  $S_n$ , kde  $n \geq 5$ . Množina  $M \subseteq A_n$  splňuje následující:

- $M$  obsahuje nějakou neidentickou permutaci.
- $M$  je uzavřená na skládání:  $(\forall \pi, \rho \in M) \pi\rho \in M$ .

- $M$  je uzavřená na konjugování libovolnou sudou permutací:  $(\forall \pi \in M)(\forall \rho \in A_n) \rho^{-1}\pi\rho \in M$ .

Dokažte, že nutně  $M = A_n$  a že toto není pravda pro  $n = 4$ .