

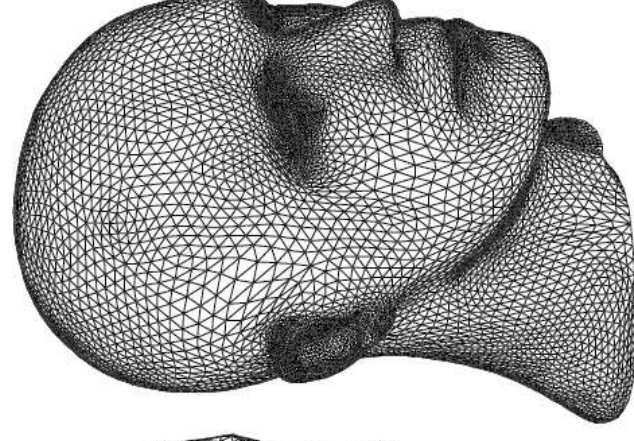
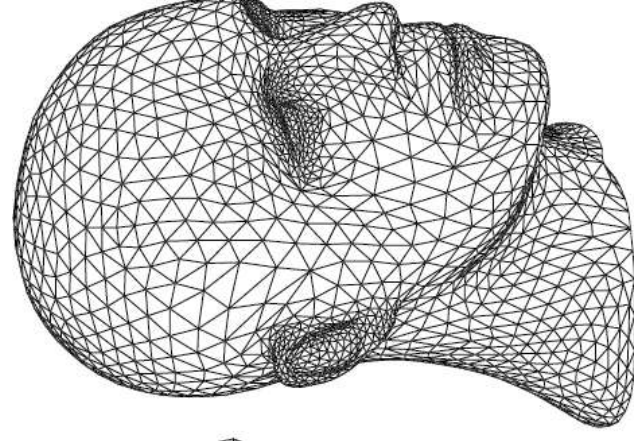
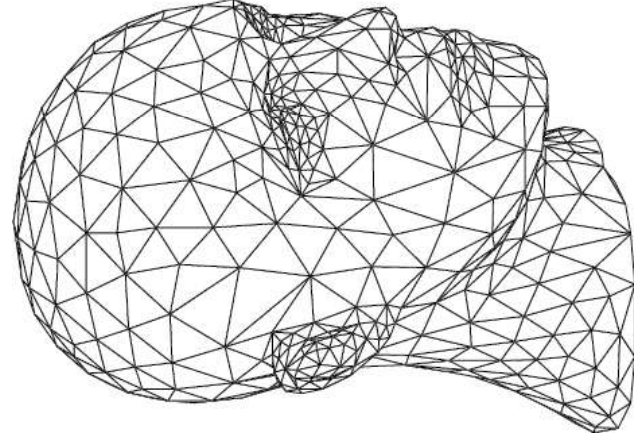
# Subdivision křivky a plochy

# Motivace, základní vlastnosti

- ▶ základní myšlenkou subdivision křivek a ploch je definovat hladkou křivku/plochu jako **limitní křivku/plochu subdivision procesu**, během kterého je postupně počáteční řídící polygon/síť zjemňován(a) pomocí nově vkládaných vrcholů
- ▶ subdivision proces v jistém smyslu zobecňuje klasické spline plochy – lze pomocí něho popsat plochy **libovolné topologie** (klasickým problémem NURBSů je jejich „ořezávání“, což není problémem pro subdivision plochy)
- ▶ vzhledem k rekurzivité subdivision procesu je přirozeně zahrnut např. **level-of-detail rendering**
- ▶ **jednotnost reprezentace** – subdivision do jisté míry vyplňuje mezeru mezi polygonálními sítěmi a spline plochami, jelikož je na ně možné nahlížet podle potřeby oběma způsoby
- ▶ **numerická stabilita** – síť vytvořené a modifikované pomocí subdivision mají mnoho hezkých vlastností, které jsou potřeba např. pro metodu konečných prvků, jsou tedy vhodné pro numerické experimenty
- ▶ subdivision proces je obvykle velmi **snadno implementovatelný a velmi efektivní**

# Motivace, základní vlastnosti

- ▶ subdivision je tedy proces, který z dané počáteční řídicí sítě vytvoří novou síť pomocí **předem daných a známých pravidel**
- ▶ nová řídicí síť může obsahovat body původní sítě, ale také nemusí
- ▶ aplikovaná pravidla mohou být stejná pro celou, ale také nemusí, mohou se i měnit v průběhu subdivision procesu
- ▶ na obrázku dole je vidět příklad subdivision procesu pro zadanou počáteční síť (vlevo) – každý trojúhelník počáteční sítě je rozdělen na 4 nové, po jednom kroku procesu (uprostřed), na dvou krocích (vpravo)

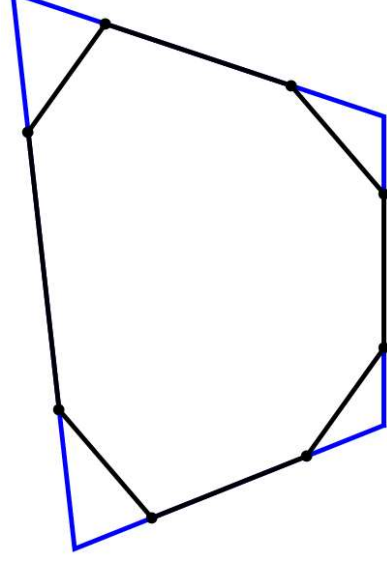
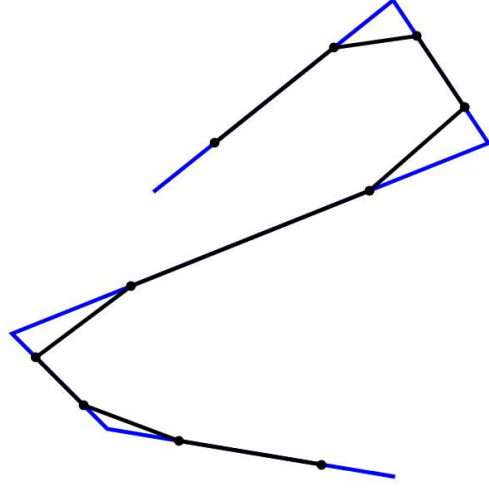


# Motivace, základní vlastnosti

- ▶ pravidla (schémata) pro modifikaci výchozí sítě je možné sestavit mnoha různými způsoby
- ▶ je zřejmé, že dané schéma ovlivňuje také tvar a hladkost výsledné křivky/plochy
- ▶ vlastnosti subdivision schémat:
  - ▶ **efektivnost** – pozice nového bodu by měla být nalezena s malým počtem operací
  - ▶ **kompaktní support** – oblast vlivu každého výchozího bodu na výslednou křivku/plochu by měla být malá a konečná
  - ▶ **lokální definice** – nalezení nového bodu by nemělo záviset na příliš vzdálených bodech výchozí sítě
  - ▶ **jednoduchost** – samotná pravidla by měla být jednoduchá a měl by jich být malý počet
  - ▶ **spojitost** – z pravidel by mělo být možné dokázat např. jakou spojitost má limitní křivka/plocha
- ▶ každé schéma se musí vypořádat i se speciálními situacemi, jako jsou výjimečné vrcholy (speciální valence vrcholu), hranice sítě apod. při zachování určité třídy spojitosti limitního povrchu

# Subdivision pro křivky, Chaikinův algoritmus

- ▶ počátky subdivision technik se datují do roku 1974, kdy [George Chaikin](#) prezentoval novou metodu pro generování křivek pod názvem *algorithmus pro vysokorychlostní generování křivek*
- ▶ princip metody spočívá v **ořezávání vrcholů** – pro vrchol původního polygon jsou nalezeny dva nové body a původní vrchol je pomocí nich „odštíhnut“

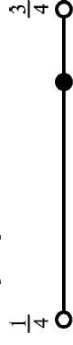


- ▶ umístění nových vrcholů potom popisují **geometrická pravidla** – pokud původní vrcholy označíme  $v_i, i = 1, \dots, n$ , potom nové vrcholy jsou

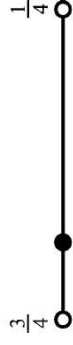
$$v'_{2i-1} = \frac{3}{4}v_i + \frac{1}{4}v_{i+1}, \quad v'_{2i} = \frac{1}{4}v_i + \frac{3}{4}v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

# Chaikinův algoritmus

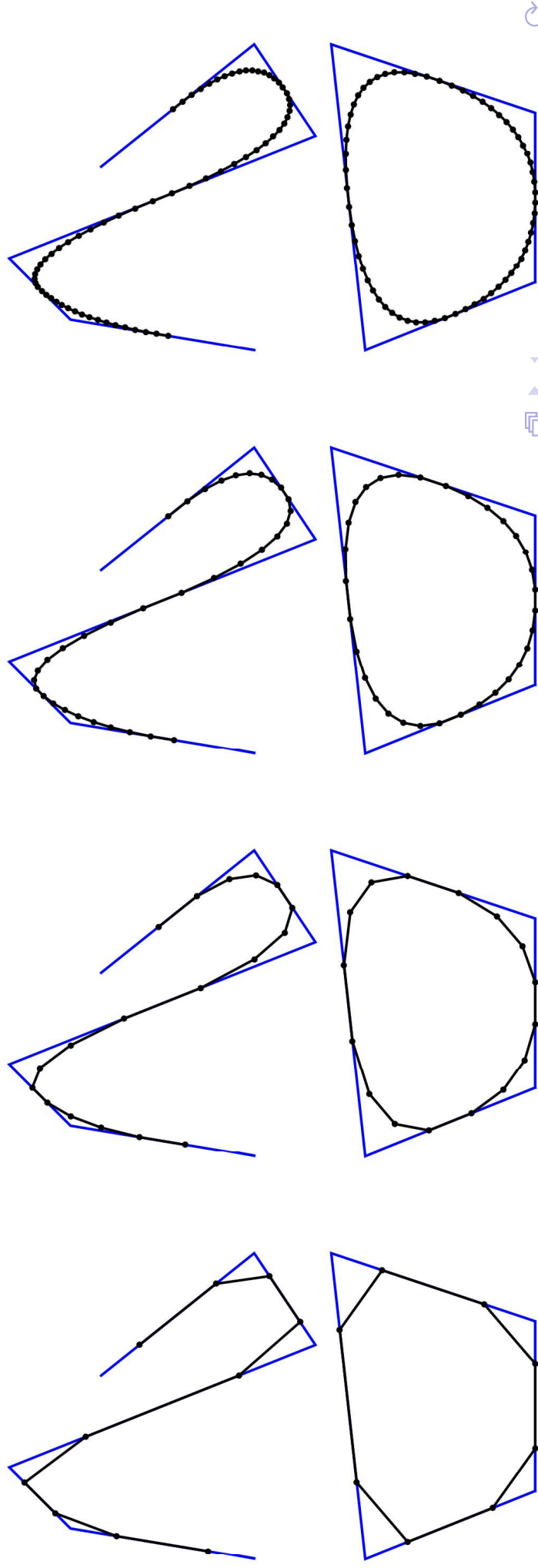
- ▶ geometrická pravidla se reprezentují pomocí tzv. **masky (topologická pravidla)**
- ▶ metoda konverguje k po částech kvadratické uniformní B-spline křivce
- ▶ první čtyři kroky metody pro neuzavřenou a uzavřenou křivku:



(a)

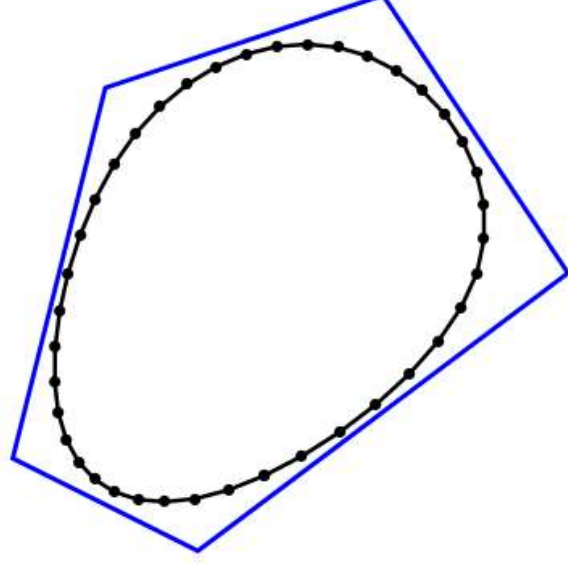
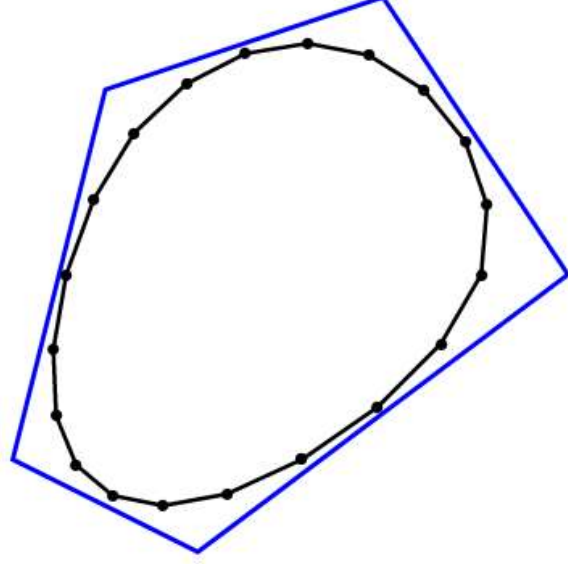
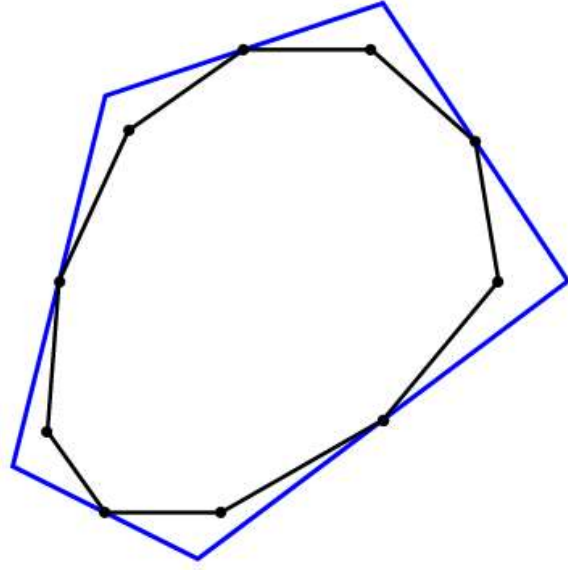


(b)



# Algorithmus Lane-Riesenfeld

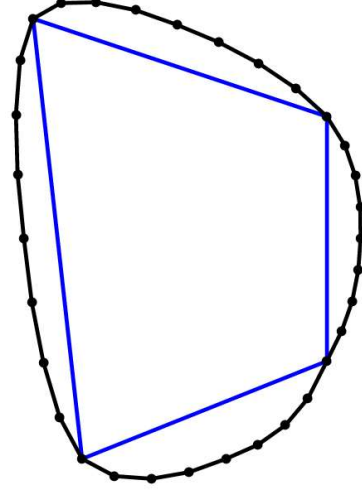
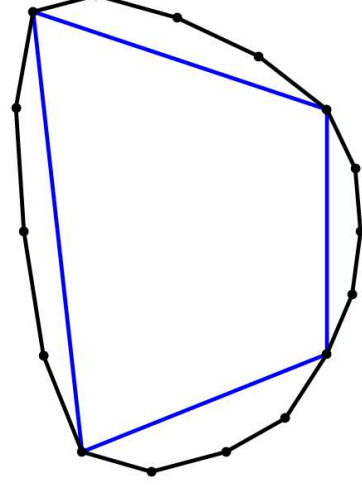
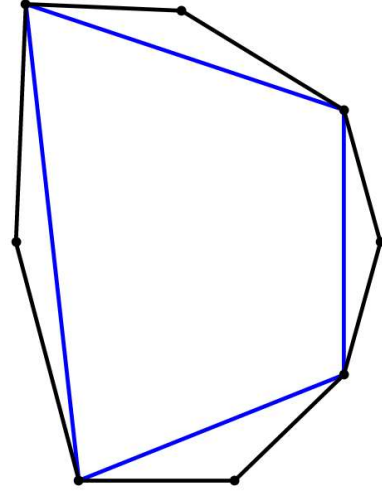
- ▶ Chaikinův algoritmus můžeme také provést tak, že nejprve řídicí polygon **doplníme o středy** všech jeho hran a **nový polygon potom získáme průměrováním** – každé nové hraně přiřadíme její střed a tyto středy vytvoří nový polygon
- ▶ algoritmus Lane-Riesenfeld potom spočívá v tom, že toto **průměrování** neprovádíme pouze jednou, ale  **$n$ -krát**
- ▶ v limitě potom tento proces konverguje k **uniformní B-spline křivce stupně  $n + 1$**



## 4-bodové schéma

- ▶ je vidět, že všechna dosud ukázaná schémata **aproximují** výchozí řídicí polygon – to vyplývá z faktu, že všechna tato schémata konvergují k uniformním B-spline křivkám, které také aproximují zadaný řídicí polygon
- ▶ nicméně je možné vytvořit i schémata, která zachovávají výchozí řídicí polygon ve všech krocích – výchozí body jsou tedy i v limitní křivce a schéma je **interpolační**
- ▶ nejjednodušším takovým případem je tzv. **čtyřbodové schéma** – mezi každé dva body  $v_i, v_{i+1}$  vložíme nový bod, původní body zůstávají, tedy geometrická pravidla jsou

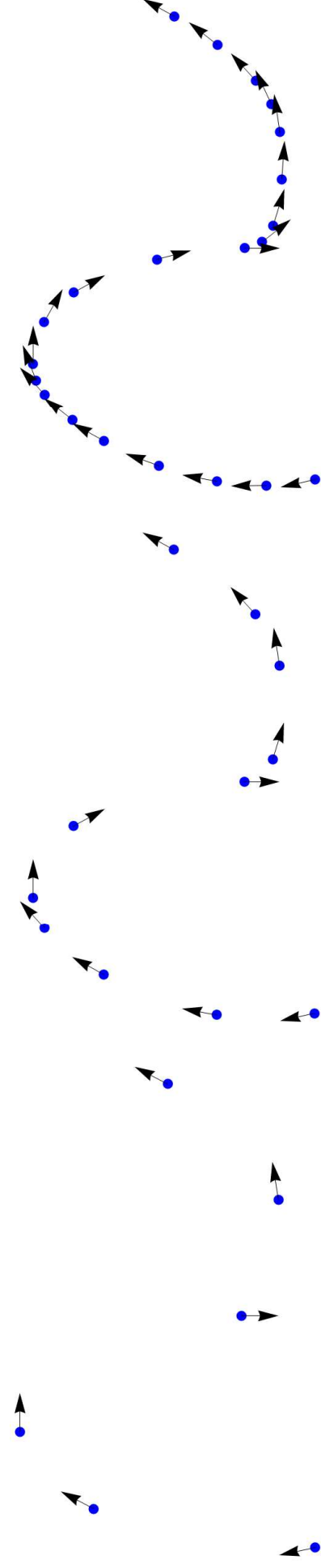
$$v'_{2i} = v_i, \quad v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i + \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}$$





# Hermitovská subdivision schémata

- ▶ vstupem není lomená čára, ale množina bodů s přiřazenými tečnami, případně tečnými vektory nebo vektory druhých derivací
- ▶ schéma generuje data stejného typu a konverguje ke křivce spojitosti indukované vstupními daty
- ▶ **příklad** Hermitovského subdivision schématu:
  - ▶ vstupem jsou dané body a jednotkové tečné vektory v nich
  - ▶ sestrojíme trojúhelník určený dvěma po sobě jdoucími body  $P_i$ ,  $P_{i+1}$  a jejich jednotkovými tečnými vektory
  - ▶ nově vloženým bodem je střed kružnice vepsané tohoto trojúhelníka a asociovaný jednotkový tečný vektor získáme normováním  $P_{i+1} - P_i$
  - ▶ limitní křivka je třídy  $G^1$



# Subdivision pro plochy – základní pojmy

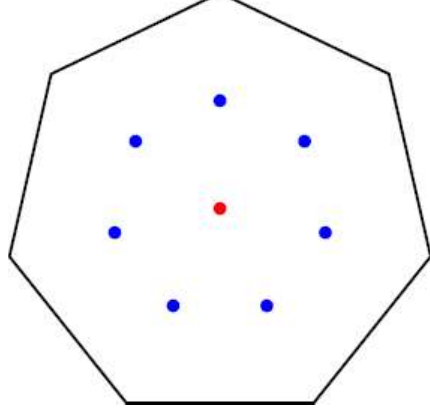
- ▶ síť dělíme na dva základní typy – **čtyřúhelníkové** a **trojúhelníkové** (obecně je možné mít i jiné, např. šestiúhelníkové, ty se ale v subdivision moc nepoužívají)
- ▶ síť dále rozdělujeme na **pravidelné** a **nepravidelné** – pravidelná síť má všechny vrcholy se stejnou **valencí** (počet hran jdoucích z vrcholu):
  - ▶ 4 pro vnitřní body čtyřúhelníkové sítě, 3 pro její krajní body
  - ▶ 6 pro vnitřní body trojúhelníkové sítě, 4 pro její krajní body
- ▶ vrcholy s jinou valencí se nazývají **výjimečné**, sítě s výjimečnými body jsou **nepravidelné**
- ▶ pro pravidelné sítě z Eulerovy charakteristiky vyplývá, že takovéto sítě je možné sestavit pouze pro objekty, jejichž **topologie je shodná s topologií roviny, válce nebo anuloidu**, jinak ne. Např. pro sféru nelze najít pravidelnou síť (ani trojúhelníkovou, ani čtyřúhelníkovou)
- ▶ dále rozlišujeme **otevřené** a **uzavřené** sítě
- ▶ metody obvykle umí pracovat a zachovat tzv. **zlomy** (předepsané hrany, ve kterých má být spojitost  $C^0$  i na limitním povrchu)

# Klasifikace metod

- ▶ **aproximační** vs. **interpolační** metody – pro aproximační schémata limitní objekt neprochází vrcholy počáteční sítě; pro interpolační prochází ve všech krocích sítě počátečními body
- ▶ **stacionární** vs. **nestacionární** metody – pro stacionární metodu jsou pravidla aplikovaná na síť během dělení neměnná; pokud jsou v některých iteracích použita různá pravidla, hovoříme o nestacionární metodě
- ▶ **uniformní** vs. **neuniformní** metody – pro uniformní metodu je v jednou kroku dělení aplikována stejná pravidla na celou síť; pokud jsou v různých místech sítě aplikována různá schémata, hovoříme o neuniformní metodě
- ▶ **globální** vs. **lokální** dělení – při globálním dělení jsou pravidla aplikována na celou síť; při lokálním dělení pouze na nějakou část sítě (adaptivní dělení)
- ▶ **čtyřúhelníkové** vs. **trojúhelníkové** metody – rozlišení podle typu sítě, na kterou je možné pravidla aplikovat
- ▶ subdivision schémata typicky během procesu vytvářejí **regulární vrcholy** (ne výjimečné), počet výjimečných vrcholů zůstává konstantní

# Doo-Sabin

- ▶ jedná se o **aproximační metodu**, která je **přímým rozšířením Chaikinova algoritmu** pro křivky
- ▶ je tedy založena na **ořezávání vrcholů** zadané sítě – každému vrcholu je přiřazeno právě tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje
- ▶ typicky se používá pro čtyřúhelníkové sítě (je možné ji ale aplikovat i na jiné sítě)
- ▶ **postup**: pro každou stěnu vypočteme její těžiště  $c$  (jako průměr všech vrcholů) a každému vrcholu  $v_i$  stěny potom přiřadíme nový bod jako střed úsečky spojující  $c$  a  $v_i$



- ▶ limitní plocha je typu  $C^1$ , s výjimkou oblastí v okolí výjimečných vrcholů
- ▶ všechny stěny původní sítě směřují ke svému těžišti, limitní plochou je **bikvadratická B-spline plocha**

# Doo-Sabin

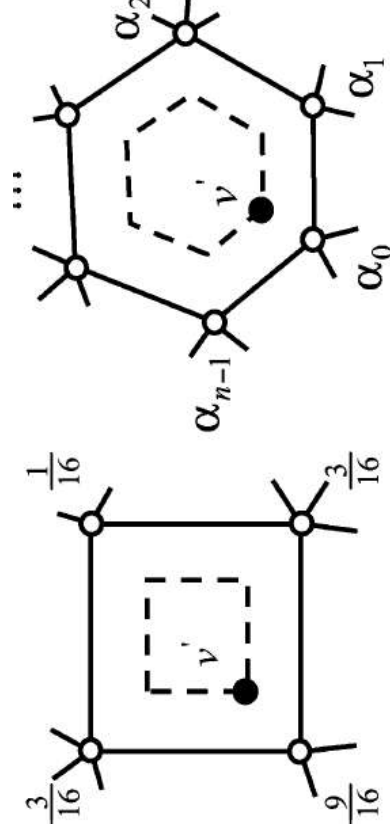
- ▶ **geometrická pravidla schématu** je nutné rozdělit na dvě části: **pro čtyřúhelník** získáme nové body cyklickou záměnou koeficientů ve vztahu

$$v' = \frac{9}{16}v_j + \frac{3}{16}v_{j-1} + \frac{1}{16}v_{j+2} + \frac{3}{16}v_{j+1},$$

pro jiné stěny než čtyřúhelníkové platí

$$v' = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i,$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{n+5}{3+2 \cos(2\pi i/n)} & i = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} & i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4n} & i = 2, \dots, n-2 \end{cases}$$



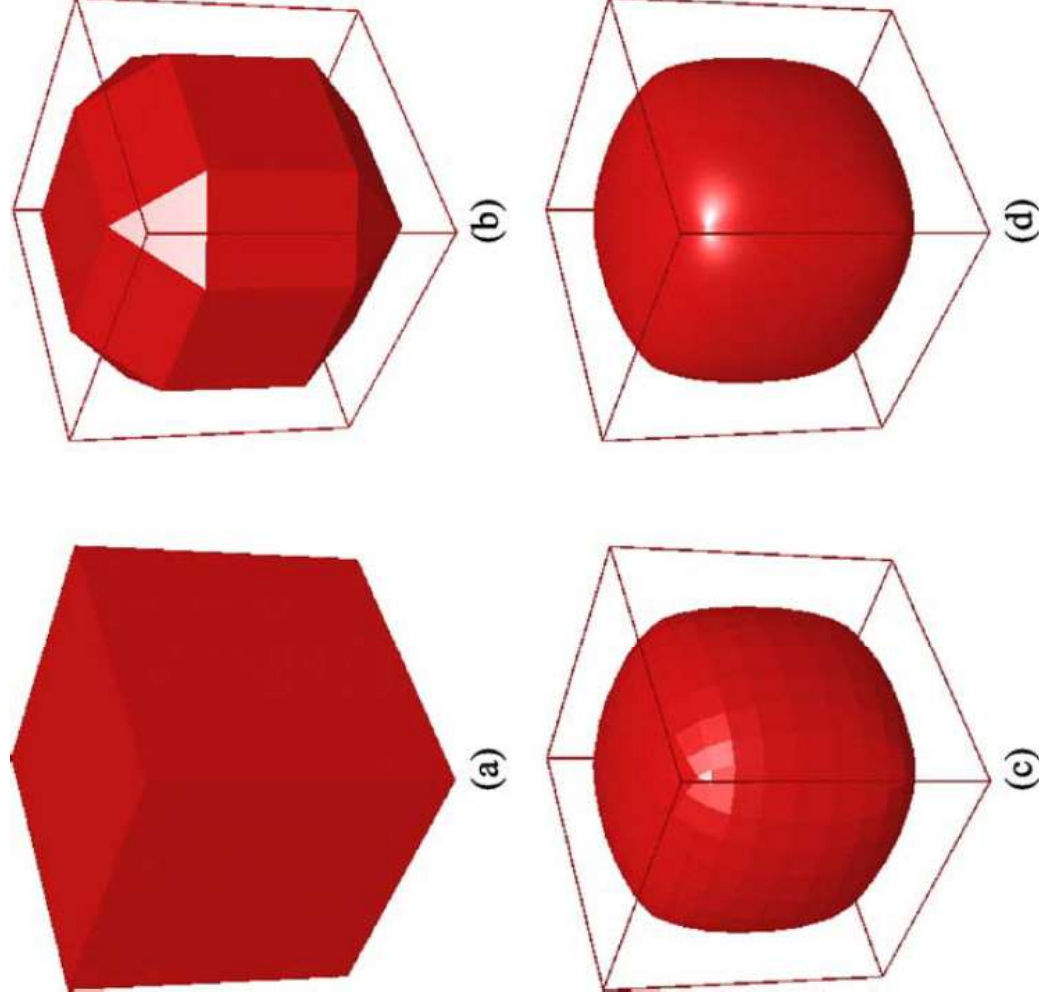
(a)

(b)

# Doo-Sabin

- ▶ **topologická pravidla** je možné shrnout do následujícího obrázku
- 
- ▶ nová síť vznikne z nově vypočtených vrcholů pomocí geometrických pravidel a obsahuje stěny tří typů:
    - ▶ **F-stěny** vzniknou spojením nových vrcholů přiřazených k dané stěně, pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna (viz obrázek (b))
    - ▶ **E-stěny** vzniknou pro každou hranu původní sítě spojením čtyř nově vložených vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů tvořících hranu (viz obrázek (c))
    - ▶ **V-stěny** vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě; pokud měl vrchol valenci  $n$ , V-stěna je  $n$ -úhelník (viz obrázek (d))

# Doo-Sabin



**Obrázek:** Doo-Sabin subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

# Catmull-Clark

- ▶ opět se jedná o **aproximační metodu**, která vznikla podobně jako kubická modifikace Chaikinova algoritmu
- ▶ podobně jako pro křivky lze totiž i pro plochy **využít vlastností B-spline** **bázových funkcí** k odvození schémat, které konvergují k uniformním bikvadratickým, bikubickým, bikvartickým ... B-spline plochám
- ▶ schéma se aplikuje na pravidelné i nepravidelné **čtyřúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je třídy  $C^2$ , až na okolí výjimečných bodů, kde je  $C^1$ ; limitní plocha je **uniformní bikubickou B-spline plochou**
- ▶ po prvním kroku dělení jsou všechny nově vytvořené stěny čtyřúhelníky a počet výjimečných vrcholů (a nepravidelných stěn) zůstává konstantní
- ▶ nově vložené vrcholy jsou trojího typu, jejich **geometrická pravidla** jsou následující:
  - ▶ **F-vrcholy** – odpovídají těžišti původní stěny, tedy

$$u_F = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 v_i$$



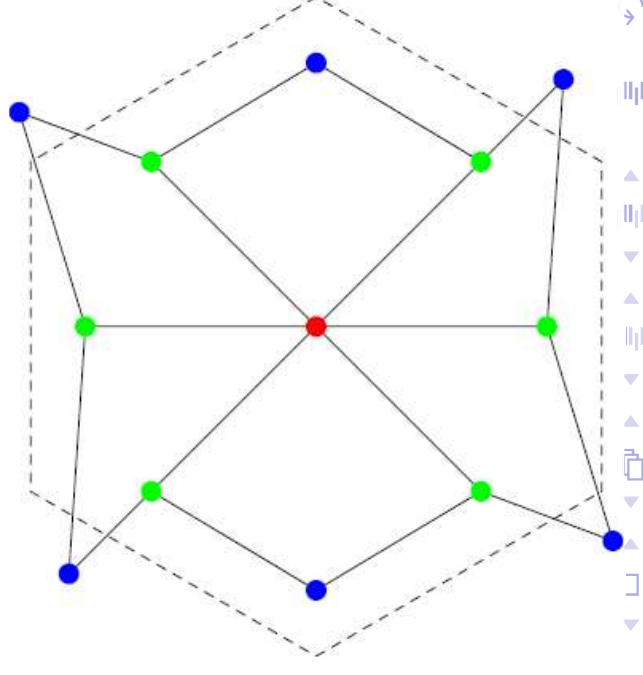
# Catmull-Clark

- ▶ pokračujeme v geometrických pravidlech ...
- ▶ **E-vrcholy** – vzniknou pro každou hranu původní sítě jako průměr koncových bodů hrany a nově nalezených F-vrcholů stěn, k nimž daná hrana přísluší, tedy

$$u_E = \frac{1}{4}(v_i + v_{i+1} + u_{F_i} + u_{F_{i+1}})$$

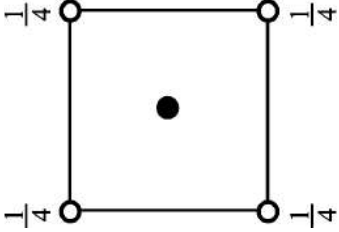
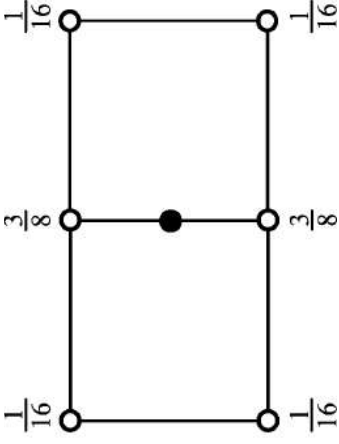
- ▶ **V-vrcholy** – vzniknou posunutím původního vrcholu  $v$ ; je-li  $E$  průměr středů hran vycházejících z vrcholu  $v$  a  $U_F$  průměr nově nalezených F-vrcholů pro stěny, kterým náleží vrchol  $v$  a  $n$  je valence vrcholu  $v$ , potom pro nový vrchol  $u_V$  platí

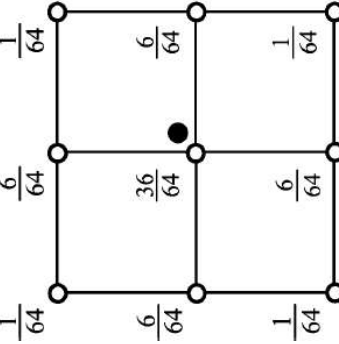
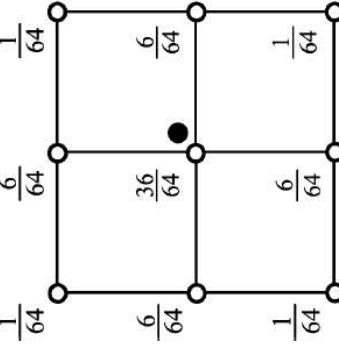
$$u_V = \frac{n-3}{n}v + \frac{2}{n}E + \frac{1}{n}U_F$$

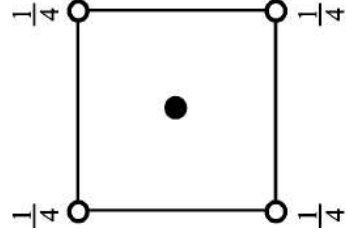
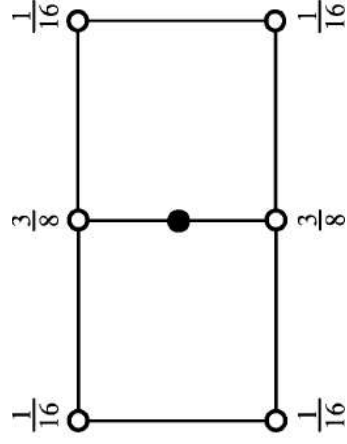
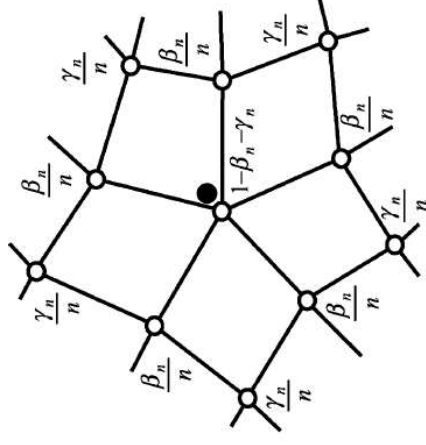


# Catmull-Clark

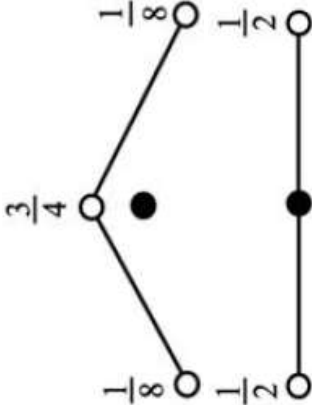
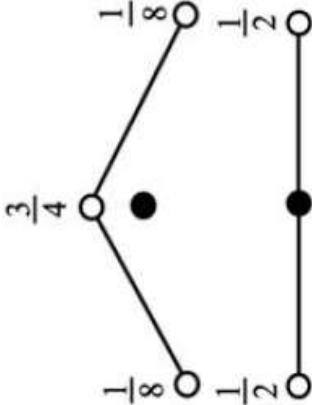
- ▶ **topologická pravidla** jsou následující ( $\beta_n = 3/(2n)$ ,  $\gamma_n = 1/(4n)$ )
 

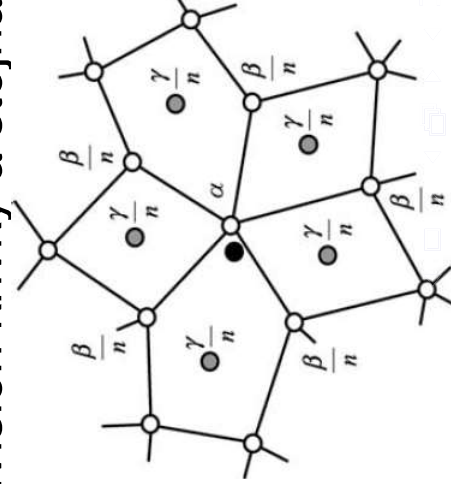
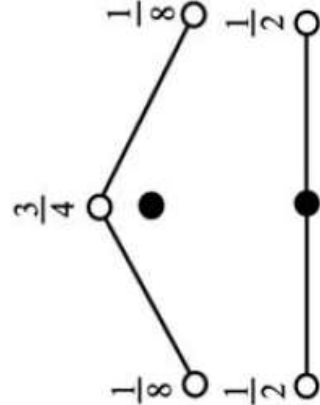


- ▶ spojením nově vložených vrcholů je získána nová síť – nejprve jsou vytvořeny hrany mezi vrcholy  $u_F$  a  $u_E$ , následně hrany mezi  $u_E$  a  $u_V$
- ▶ navíc je možné zahrnout pravidla pro tzv. „sharp features“, jako jsou zlomy, hraniční hrany, rohy, hroty – rohy necháváme nezměněné, pro zlomy a hraniční hrany použijeme pravidla pro kubické subdivision křivky a stejná pravidla jako pro hladké vrcholy také pro hroty
 

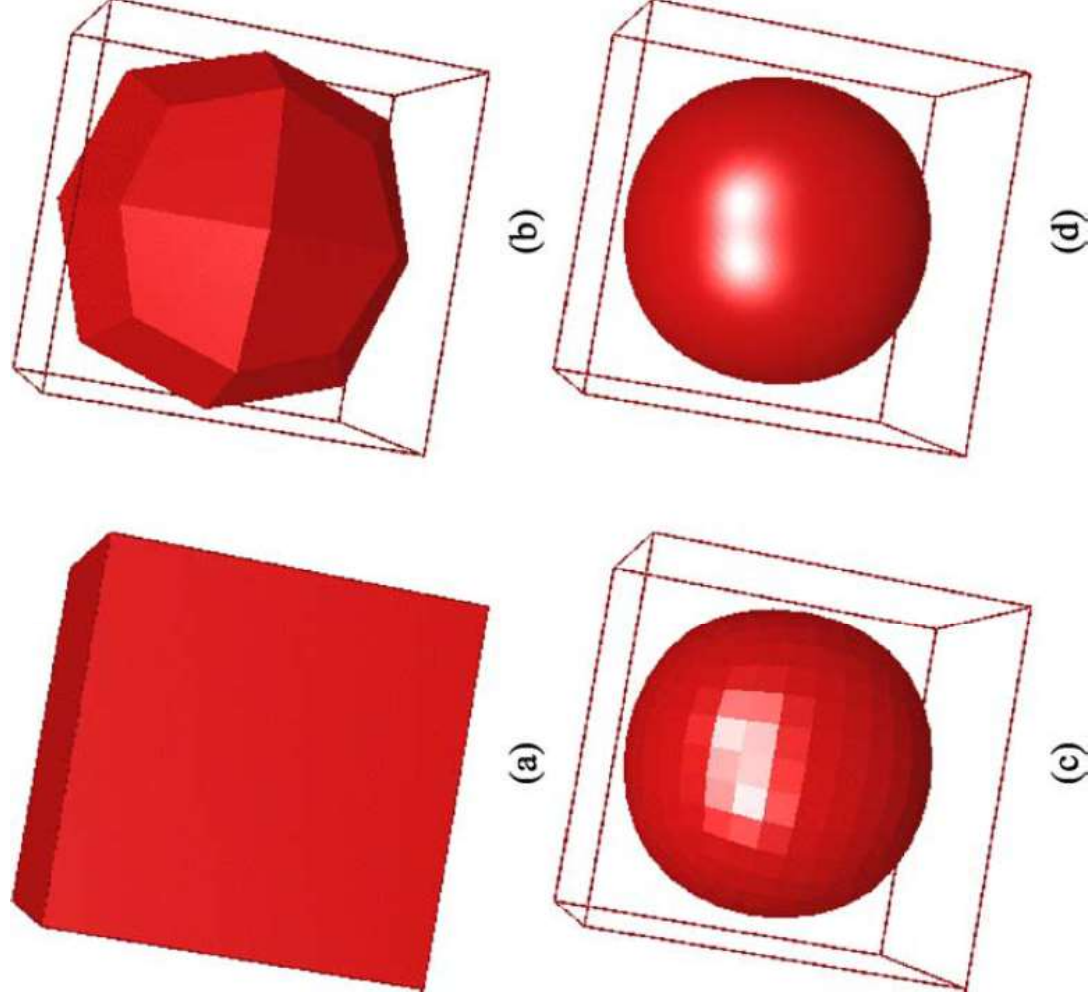


- ▶ spojením nově vložených vrcholů je získána nová síť – nejprve jsou vytvořeny hrany mezi vrcholy  $u_F$  a  $u_E$ , následně hrany mezi  $u_E$  a  $u_V$
- ▶ navíc je možné zahrnout pravidla pro tzv. „sharp features“, jako jsou zlomy, hraniční hrany, rohy, hroty – rohy necháváme nezměněné, pro zlomy a hraniční hrany použijeme pravidla pro kubické subdivision křivky a stejná pravidla jako pro hladké vrcholy také pro hroty
 



# Catmull-Clark



**Obrázek:** Catmull-Clark subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

# Loop

- ▶ jedná se o **aproximační schéma**, které se aplikuje na **trojúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je třída  $C^2$ , až na okolí výjimečných vrcholů, kde je třídy  $C^1$
- ▶ zjemňování sítě probíhá opět pomocí **vkládání nových vrcholů**, které jsou zde dvojího typu
- ▶ první typ jsou **body vzniklé z hran původní sítě** – každá hrana náleží dvěma stěnám, jejichž vrcholy označíme  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , nový bod  $u_E$  najdeme ze vztahu

$$u_E = \frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2 + \frac{3}{8}v_3 + \frac{1}{8}v_4$$

- ▶ druhý typ jsou **body vzniklé z vrcholů původní sítě** – označíme-li  $v_0$  vrchol, pro který počítáme nový vrchol  $u_V$  a  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  jsou koncové vrcholy hran, které vycházejí z  $v_0$ , potom pro  $u_V$  platí

$$u_V = \beta \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} v_i \right) + (1 - \beta)v_0,$$

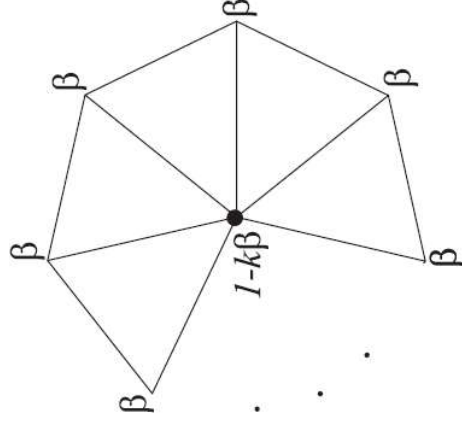
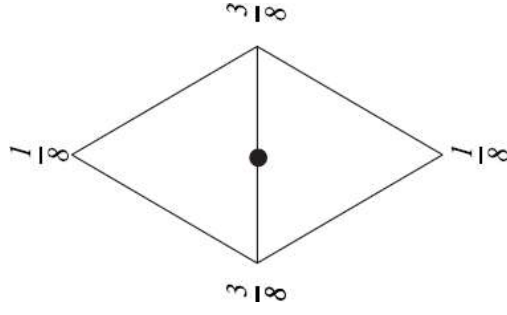
kde

$$\beta = \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2$$

- ▶ pro vrchol valence 6 je  $\beta = \frac{3}{8}$

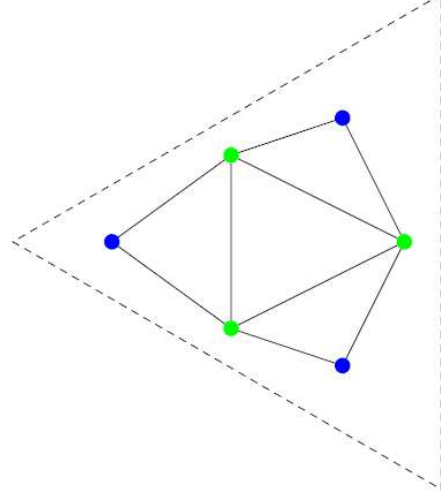
# Loop

- ▶ topologická pravidla schématu jsou

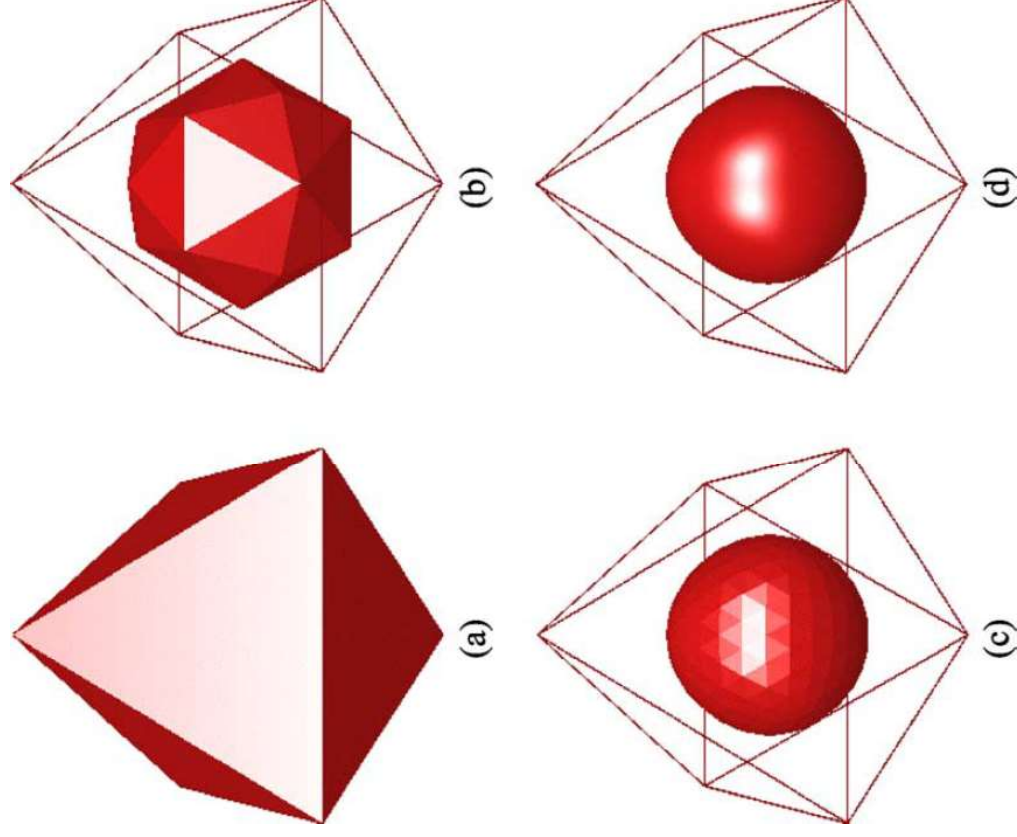


zlomy, hranice

- ▶ ze získaných vrcholů se vytváří **nová síť** (viz obrázek) – každý trojúhelník je rozložen na čtyři nové trojúhelníky a vrcholy mají valenci 6 kromě vrcholů, jež vznikly z výjimečných vrcholů



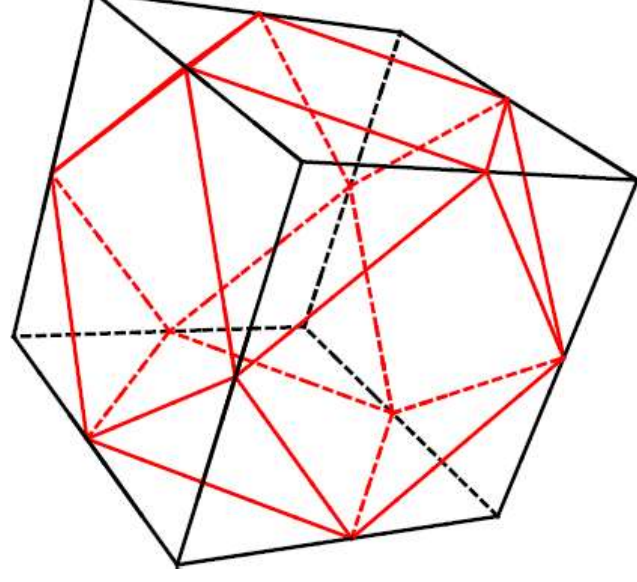
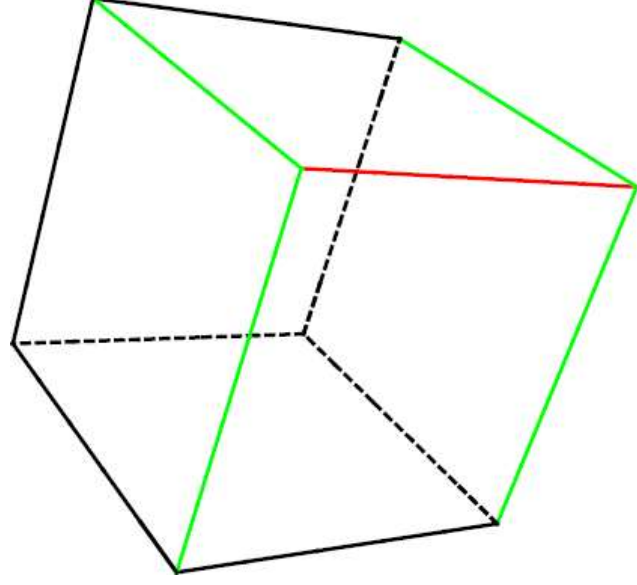
# Loop



**Obrázek:** Loop subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

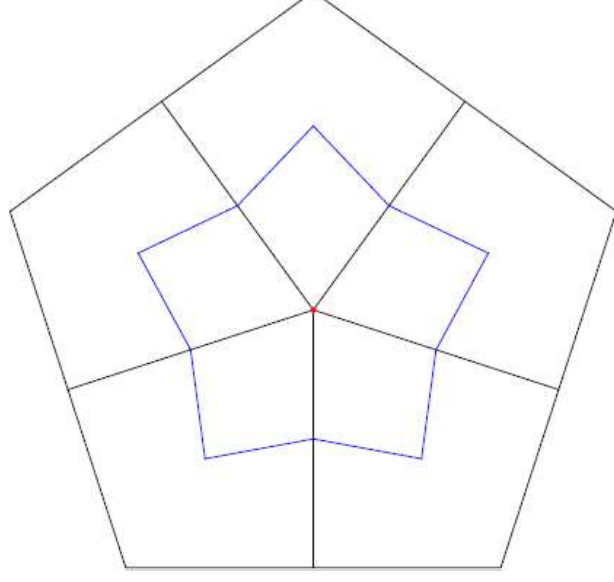
# Metoda střední hrany

- ▶ opět se jedná o **aproximační schéma**, tentokrát určené pro **čtyřúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je všude třídy  $C^1$
- ▶ princip metody spočívá ve **vkládání středů hran** původní sítě
- ▶ **postup**: jestliže  $v_i v_{i+1}$  je hrana původní sítě, najdeme střed této hrany  $u = 1/2(v_i + v_{i+1})$  a tento střed spojíme se středy sousedních hran (hrany původní sítě, jejichž jeden vrchol je  $v_i$  nebo  $v_{i+1}$ ), na závěr jsou původní hrany odstraněny



# Metoda střední hrany

- ▶ v případě výjimečných vrcholů je potřeba postupovat jinak – **střední stran se spojují s těžišti stěn**, které mají společný výjimečný vrchol



- ▶ většina bodů vytvořených během metody je regulárních, tedy s valencí 4 (nový bod je typicky spojen se čtyřmi sousedy)
- ▶ pokud na počáteční síť aplikujeme metodu střední hrany dvakrát, dostaneme síť, která je shodná se sítí po aplikaci **Doo-Sabinovy metody** na počáteční síť

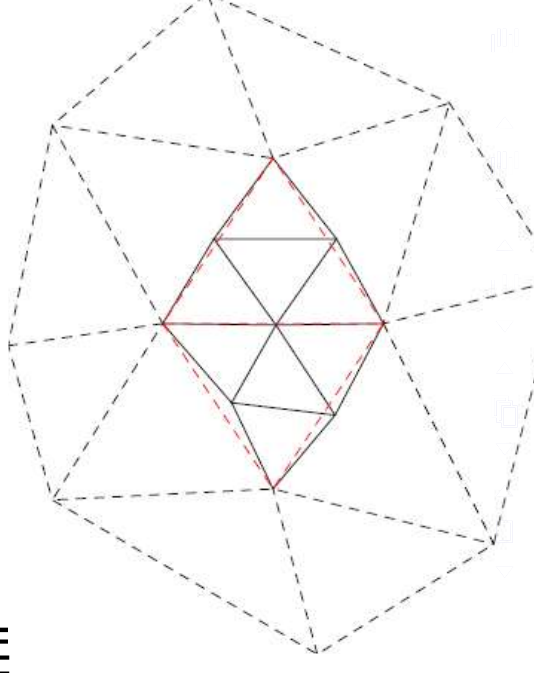
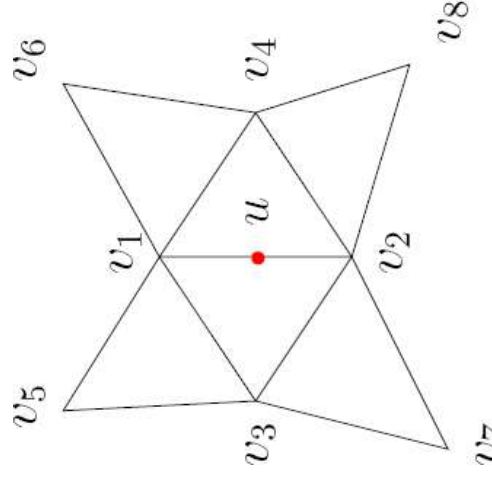


# Motýlí metoda

- ▶ jedno z prvních **interpolačních schémat**, které se aplikuje na **trojúhelníkové sítě**
- ▶ limitní povrch je třídy  $C^1$ , až na okolí výjimečných vrcholů
- ▶ jedná se o **rozšíření 4-bodového schématu** pro křivky, které je rozšířeno pro **osmibodové okolí vrcholu sítě**
- ▶ **nový bod  $u^E$**  sítě, příslušný hraně  $v_1v_2$  lze najít pomocí vztahu

$$u^E = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{8}\gamma(v_3 + v_4) - \frac{1}{16}\gamma(v_5 + v_6 + v_7 + v_8)$$

- ▶ maska metody je na obrázku vlevo, metoda má jméno podle tvaru masky
- ▶ **nové hrany** vzniknou tak, že nový vrchol je spojen hranou se starými vrcholy  $v_1, v_2$  a dále s ostatními novými vrcholy příslušnými ke hranám  $v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4, v_2v_4$  – každý trojúhelník je tak nahrazen 4 novými



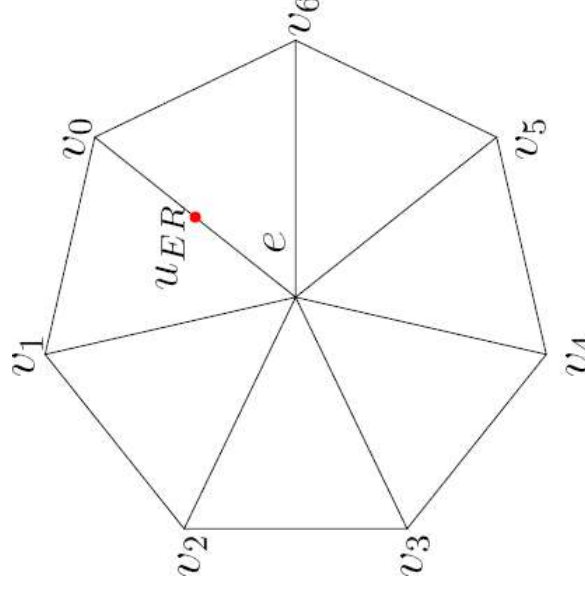
# Modifikovaná motýlí metoda

- ▶ později se zjistilo, že klasická motýlí metoda neprodukuje dostatečně hladké plochy pro nepravidelné sítě
- ▶ pokud je jeden z vrcholů hrany výjimečný ( $e$ ) a  $v_i$  jsou vrcholy mající společnou hranu s  $e$ , najdeme bod příslušný hraně pomocí vztahu (pro valenci  $k \geq 5$ )

$$u^E = \frac{3}{4}e + \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i v_i, \quad \omega_i = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{4} + \cos(2\pi i/k) + \frac{1}{2} \cos(4\pi i/k) \right)$$

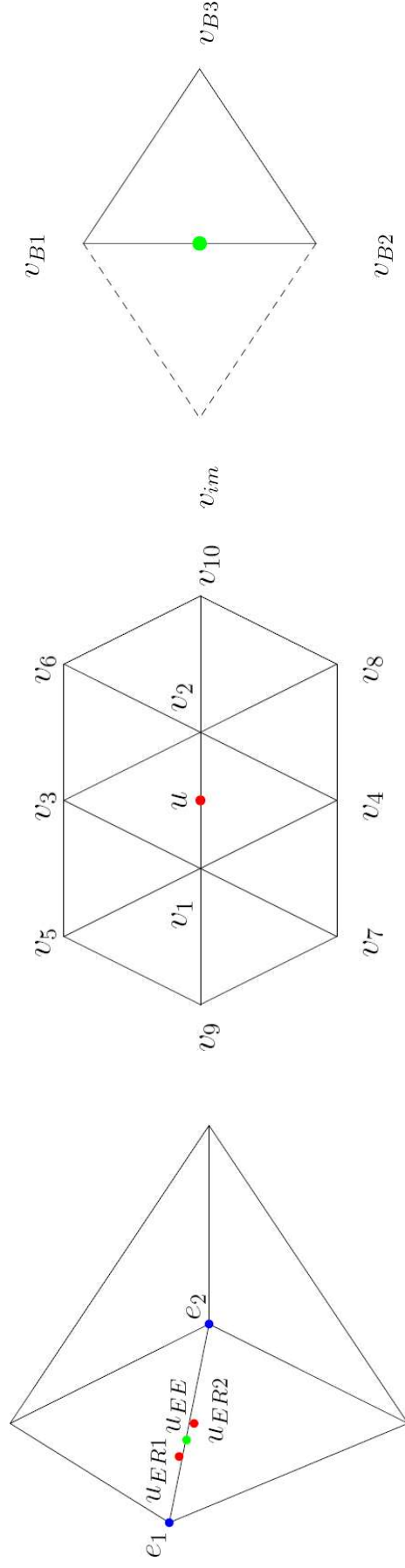
- ▶ pro valence  $k = 3$  a  $k = 4$  koeficienty jsou

$$k = 3 : \omega_0 = \frac{5}{12}, \omega_{1,2} = -\frac{1}{12}, \quad k = 4 : \omega_0 = \frac{3}{8}, \omega_2 = -\frac{1}{8}, \omega_{1,3} = 0$$



# Modifikovaná motýlí metoda

- ▶ další možností je, že **hranu tvoří jen výjimečné vrcholy** – potom je nový bod příslušný této hraně vypočten jako průměr hodnot získaných z předchozích vztahů (viz obrázek vlevo)
- ▶ někdy se u modifikované metody také uvádí modifikace výpočtu nového vrcholu pro hranu bez výjimečných vrcholů – **desetibodové schéma** (viz obrázek uprostřed)

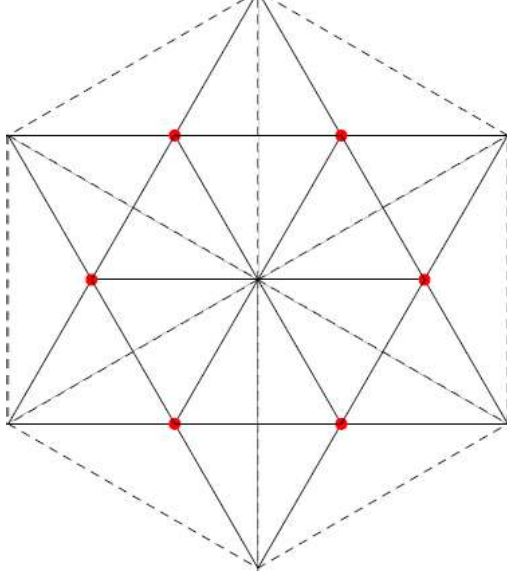


- ▶ metoda řeší také **dělení na hranici** – založeno na principu virtuálního vrcholu, kdy k otevřené síti přidáme síť se stejnou hranicí; nový vrchol je potom vygenerován pomocí 4 bodů (3 vrcholy původní sítě, 1 virtuální vrchol) ze vztahu

$$u_B^E = -\frac{1}{16}u_{im} + \frac{9}{16}u_{B1} + \frac{9}{16}u_{B2} - \frac{1}{16}u_{B3}$$

$\sqrt{3}$ 

- ▶ jedná se o **interpolační metodu**, která se aplikuje na **trojúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je třídy  $C^2$ , až na okolí výjimečných bodů, kde je  $C^1$
- ▶ zjemnění probíhá pomocí **vkládání nových vrcholů**, která náleží stěnám sítě
- ▶ **postup**: nový vrchol je vložen na místo těžiště stěny (průměr vrcholů stěny), staré hrany potom zaniknou a vzniknou nové hrany, nejprve mezi těžištěm a vrcholy dané stěny a následně jsou vytvořeny hrany mezi těžišti sousedních stěn



- ▶ nově vložené vrcholy mají valenci 6

# Kobbelt

- ▶ jedná se o **interpolační schéma**, které se aplikuje na **čtyřúhelníkové sítě**
- ▶ limitní povrch je třídy  $C^1$
- ▶ pro pravidelné sítě se redukuje na tenzorový součin dvou 4-bodových interpolačních schémat pro křivky
- ▶ obecný vztah pro **geometrická pravidla 4-bodového schématu** jsou

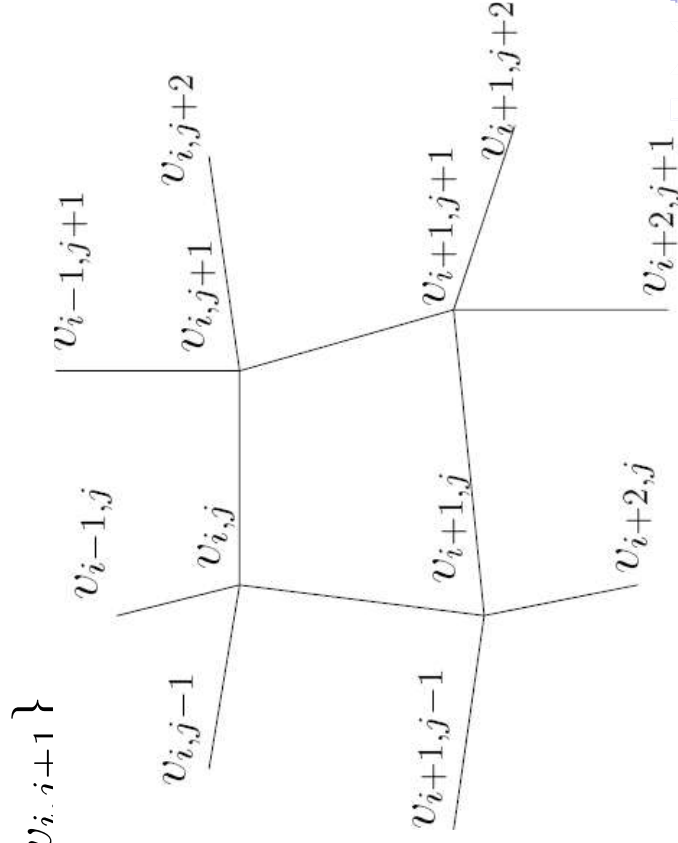
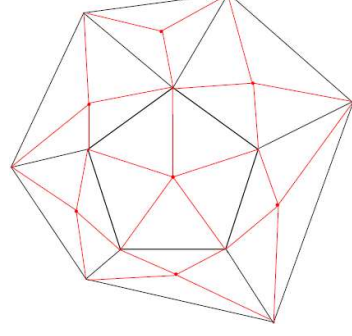
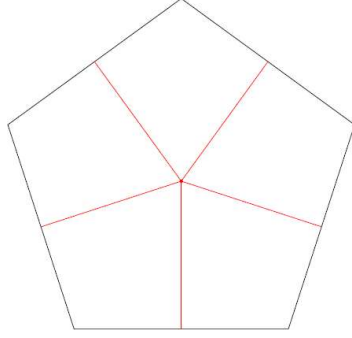
$$\begin{aligned} u_{2j+1} &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right)(v_i + v_{i+1}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right)(v_{i-1} + v_{i+2}) \\ u_{2i} &= v_i \end{aligned}$$

kde  $\gamma$  se volí z intervalu  $(0, 2(\sqrt{5} - 1))$ , jelikož tyto hodnoty zajišťují konvergenci metody ke hladké křivce (typicky je  $\gamma = 1$ , viz dříve)

- ▶ metoda může začít tím, že z **libovolné sítě vytvoříme síť čtyřúhelníkovou**:
  - ▶ jednou z možností je aplikovat na síť jednu iteraci metody **Catmull-Clark ( $C$ )** – každý  $n$ -úhelník je rozdělen na  $n$  čtyřúhelníků tak, že se vypočtou těžiště všech  $n$ -úhelníků, středy všech hran a každá stěna je nahrazena čtyřúhelníky, jež vzniknou spojením středů původních hran a těžiště stěny
  - ▶ alternativou je modifikace metody **Catmull-Clark ( $\sqrt{C}$ )** – změnou je, že se vypočtou pouze těžiště všech stěn a ty se spojují s vrcholy příslušných stěn

# Kobbelt

- ▶ metoda ( $C$ ) a ( $\sqrt{C}$ )
- ▶ máme-li čtyřúhelníkovou síť, můžeme aplikovat samotná pravidla – zaměříme se nyní na regulární vrcholy a jejich okolí, stěna  $f_{ij}$  je určena vrcholy  $\{v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,i+1}\}$



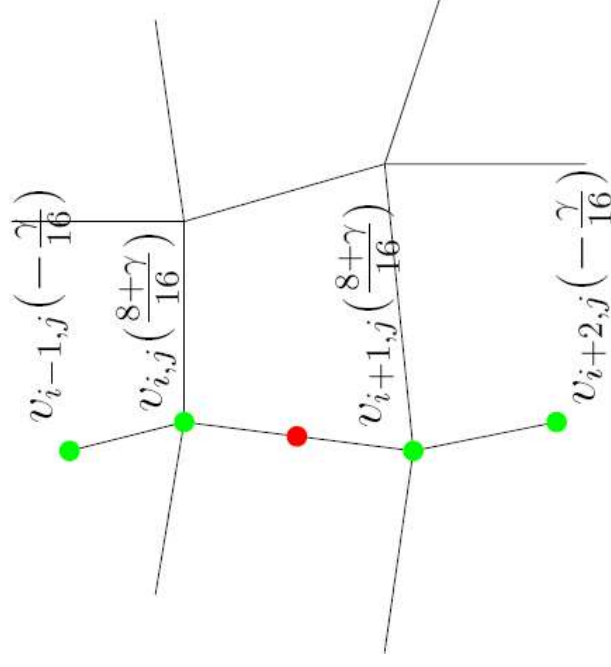
# Kobbelt

- ▶ nově vložené vrcholy lze rozdělit do tří skupin: **vrcholové**  $u_{2i,2j}^V$ , **hranové**  $u_{2i+1,2j}^E$ ,  $u_{2i,2j+1}^E$  a **stěnové**  $u_{2i+1,2j+1}^F$
- ▶ vrcholové  $u_{2i,2j}^V$  jsou přímo body původní sítě (jde o interpolační metodu), tedy

$$u_{2i,2j}^V = v_{i,j}$$

- ▶ hranové  $u_{2i+1,2j}^E$ ,  $u_{2i,2j+1}^E$  najdeme opakovanou aplikací 4-bodového schématu

$$\begin{aligned} u_{2i+1,2j}^E &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right)(v_{i,j} + v_{i+1,j}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right)(v_{i-1,j} + v_{i+2,j}) \\ u_{2i,2j+1}^E &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right)(v_{i,j} + v_{i,j+1}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right)(v_{i,j-1} + v_{i,j+2}) \end{aligned}$$



# Kobbelt

- ▶ posledními vrcholy jsou stěnové vrcholy  $u_{2i+1,2j+1}^F$  – je možné je najít dvojím způsobem
- ▶ první možností je využít již vypočtených hranových vrcholů  $u_{2i+1,2j-2}^E, \dots, u_{2i+1,2j+4}^E$  nebo  $u_{2i-2,2j+1}^E, \dots, u_{2i+4,2j+1}^E$  a 4-bodového schématu, tedy

$$u_{2i+1,2j+1}^F = \left( \frac{8+\gamma}{16} \right) (u_{2i+1,j}^E + u_{2i+1,2j+2}^E) - \left( \frac{\gamma}{16} \right) (u_{2i+1,2j-2}^E + u_{2i+1,2j+4}^E)$$

nebo

$$u_{2i+1,2j+1}^F = \left( \frac{8+\gamma}{16} \right) (u_{2i,2j+1}^E + u_{2i+2,2j+1}^E) - \left( \frac{\gamma}{16} \right) (u_{2i-2,2j+1}^E + u_{2i+4,2j+1}^E)$$

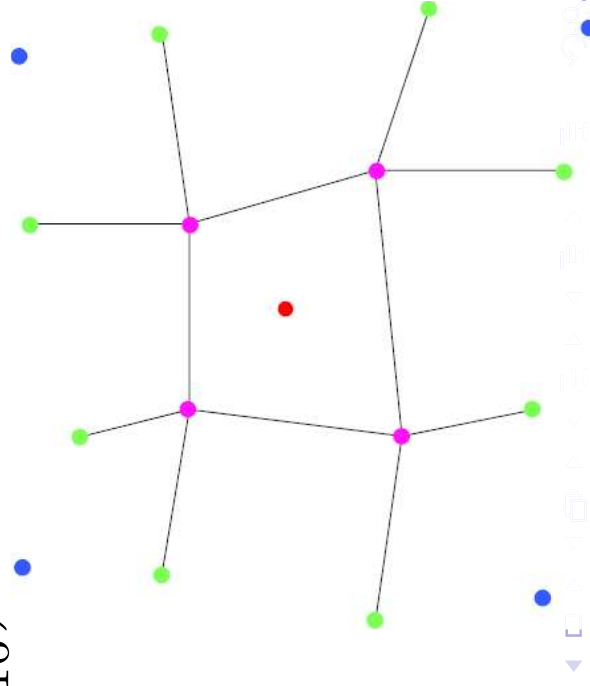
Oba způsoby dávají stejný výsledek.

- ▶ druhý postup využívá původních vrcholů

●  $-\frac{\gamma}{16} \frac{8+\gamma}{16}$

●  $\left( \frac{8+\gamma}{16} \right)^2$

●  $\left( -\frac{\gamma}{16} \right)^2$

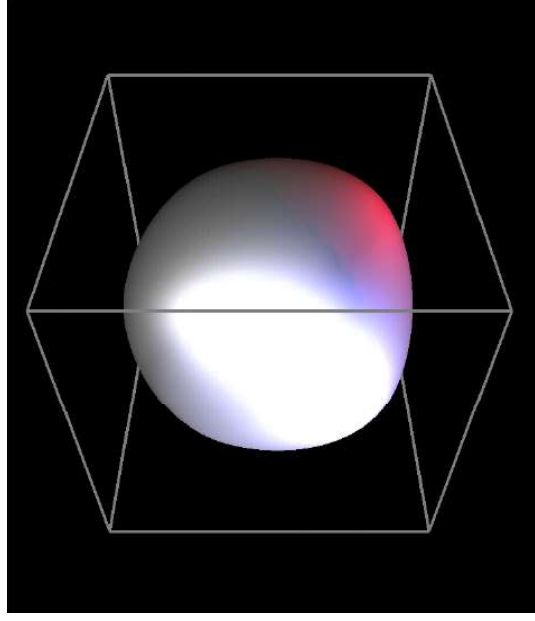




# Shrnutí metod

Název metody	Typ metody	Typ sítě	Spojitosť
Doo-Sabin	aproximační	□	$C^1 (C^0)$
Catmull-Clark	aproximační	□	$C^2 (C^1)$
Metoda střední hrany	aproximační	□	$C^1 (C^1)$
Loop	aproximační	△	$C^2 (C^1)$
Motýlí metoda	interpolační	△	$C^1 (C^0)$
Modifikovaná motýlí metoda	interpolační	△	$C^1 (C^1)$
$\sqrt{3}$	interpolační	△	$C^2 (C^1)$
Kobbelt	interpolační	□	$C^1 (C^1)$

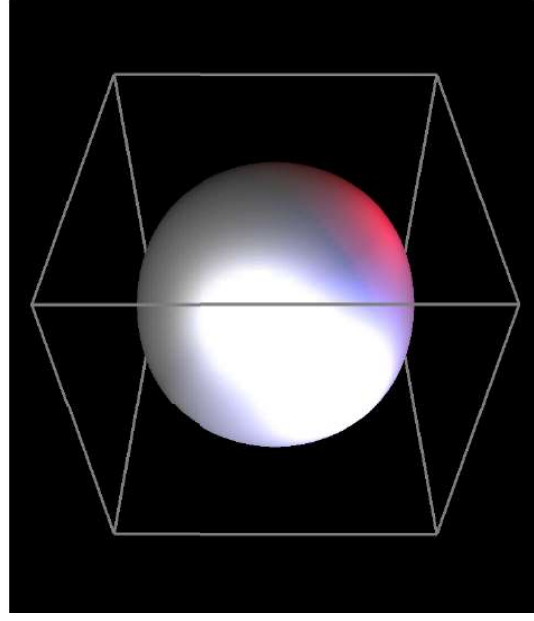
# Srovnání metod



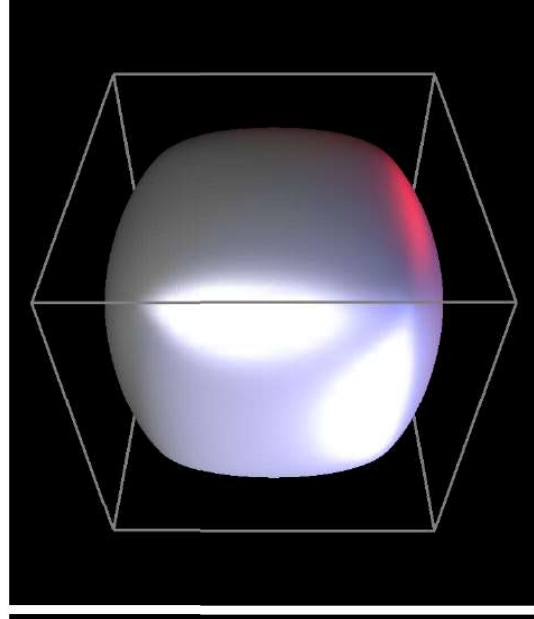
*Loop*



*Butterfly*

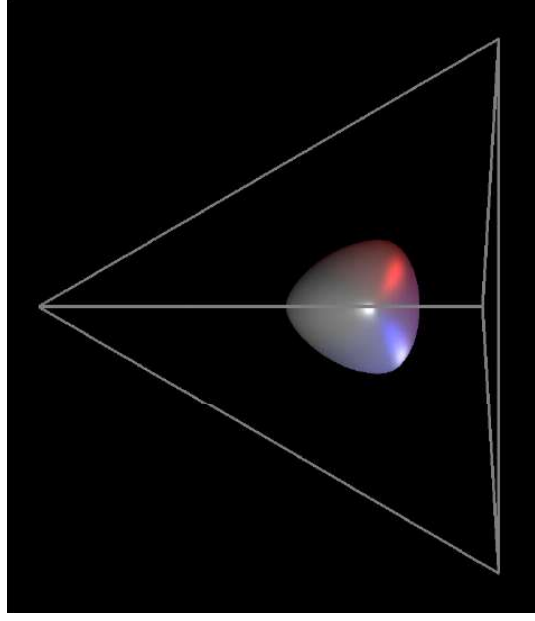


*Catmull-Clark*

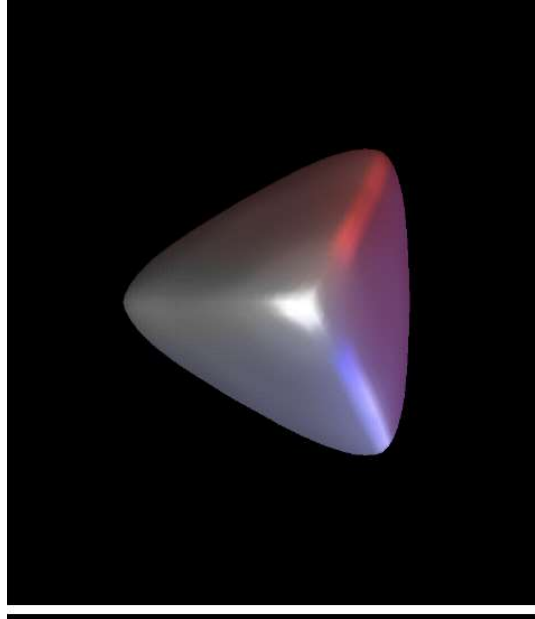


*Doo-Sabin*

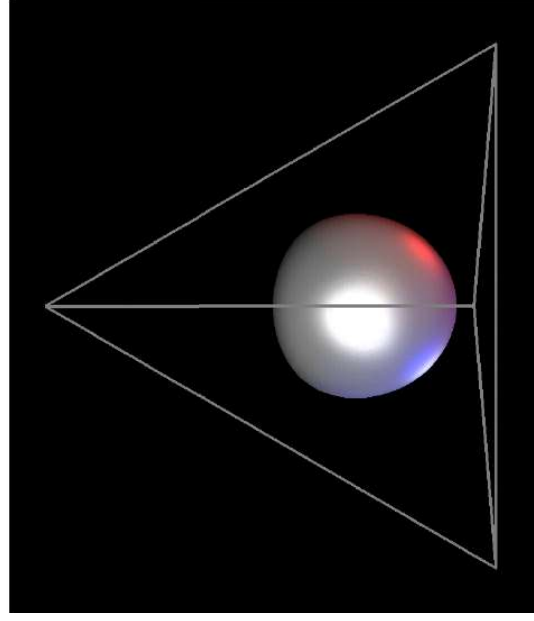
# Srovnání metod



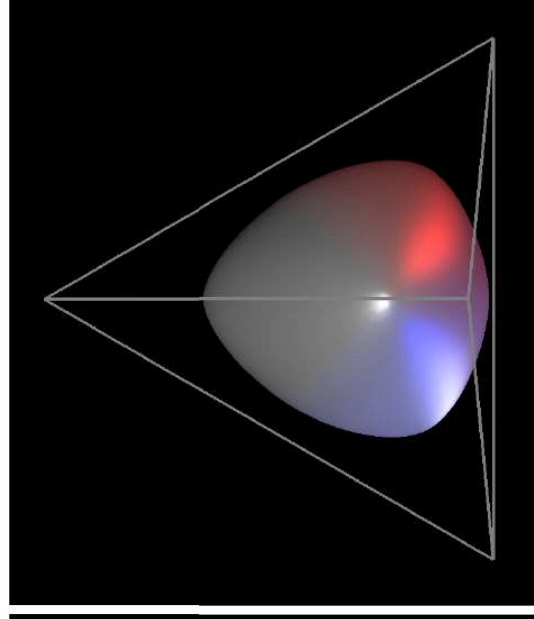
*Loop*



*Butterfly*



*Catmull-Clark*



*Doo-Sabin*

# Srovnání metod

## Krychle

- ▶ Loop a Catmull-Clark produkují asi nejlíbivější výsledky, hlavním důvodem je, že obě metody konvergují k ploše třídy  $C^2$  pro pravidelné počáteční síť
- ▶ jelikož počáteční síť je čtyřúhelníková, asi nejhezčí plochu produkuje Catmull-Clark; plocha generovaná Loopovou metodou je více asymetrická, jelikož krychle musela být nejprve triangulována
- ▶ Doo-Sabin je mnohem blíže původní síti než ostatní aproximační metody
- ▶ plochu nejhorší kvality produkuje interpolační modifikovaná motýlí metoda

## Čtyřstěn

- ▶ platí podobná pozorování jako pro krychli
- ▶ navíc je dobré si všimnout extrémního zmenšení výsledné plochy oproti počáteční síti pro Loopovu a Catmull-Clarkovu metod, což je charakteristické pro aproximační metody

## Shrnutí

- ▶ pokud nevyžadujeme interpolační plochu, jako optimální volba se zdá Loopova a Catmull-Clarkova metoda, v závislosti na typu počáteční síť