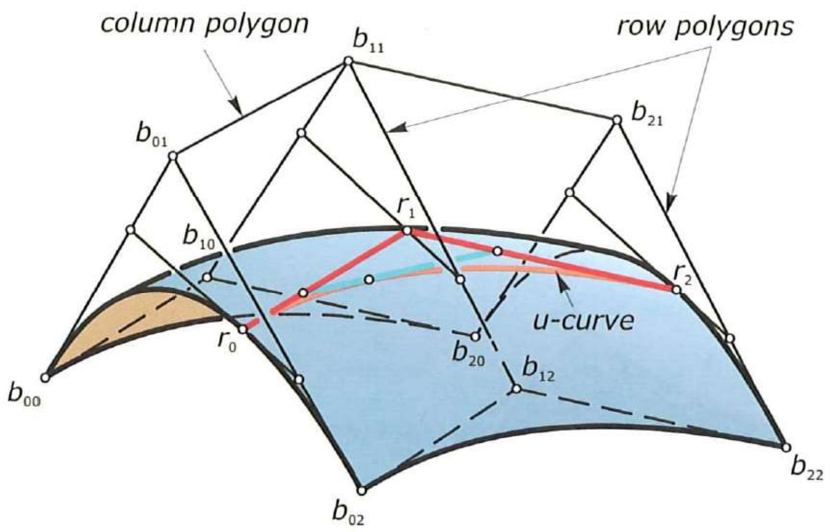
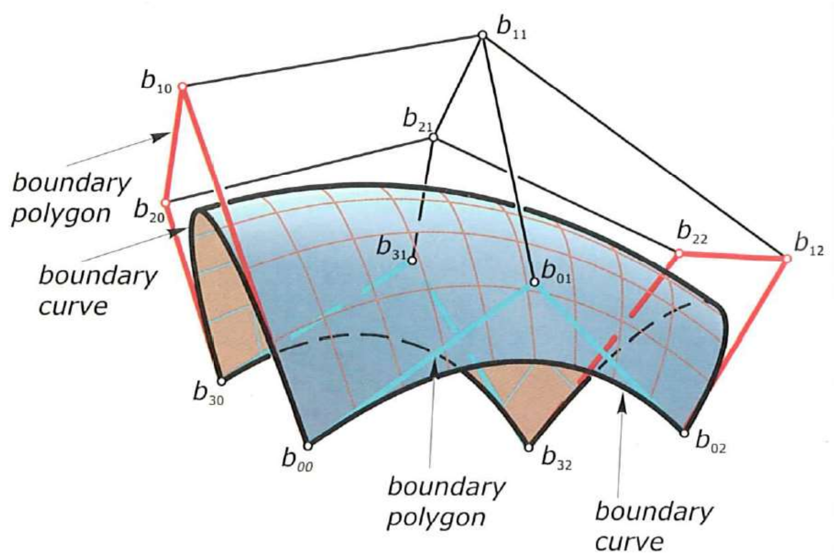
Bézierovy křivky

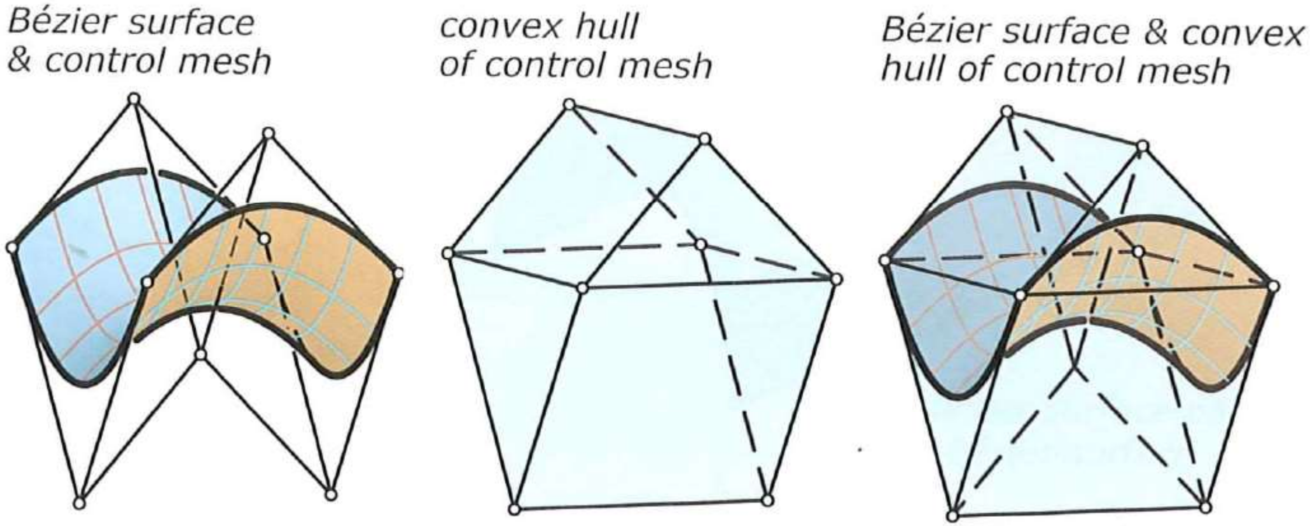
- obecná Bézierova plocha je určena řídící sítí bodů $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$
- plocha obsahuje dva systémy Bézierových křivek: u-křivky stupně m a v-křivky stupně n
- k nalezení bodu na Bézierově ploše, který odpovídá dvojici parametrů (u_0, v_0) se dá využít algoritmus de Casteljau pro křivky – nejdříve pro u_0 najdeme řídící body odpovídající v-křivky a pro tuto v-křivku najdeme bod odpovídající parametru v_0 (i obráceně)





Vlastnosti Bézierových křivek

- Bézierova plocha je pro danou řídící síť $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ dána parametrizací
$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{B}_{i,j},$$
kde $B_{i,m}(u)$, $B_{j,n}(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy
- hraniční řídící polygony řídící sítě určují Bézierovy křivky, které jsou okrajovými křivkami dané Bézierovy plochy
- Bézierova plocha leží v konvexním obalu své řídící sítě
- afinní invariantnost (podobně jako pro křivky)



Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?

Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?
- pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1-v):v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1-v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01}, \; \mathbf{R}_1 = (1-v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

- u-křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1-u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u,v) &= (1-u)(1-v)\mathbf{B}_{00}+ \\ &+ (1-u)v\mathbf{B}_{01}+ \\ &+ u(1-v)\mathbf{B}_{10}+ \\ &+ uv\mathbf{B}_{11} = \\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij} \end{aligned}$$

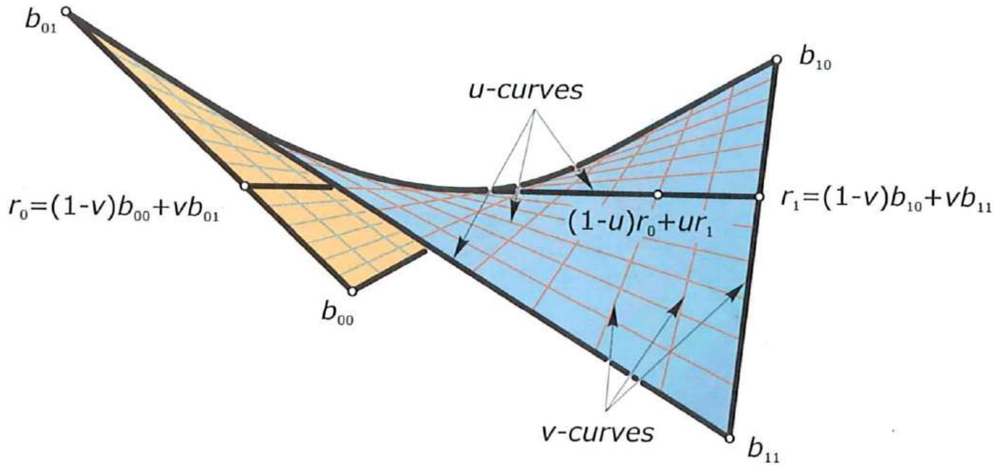
Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?
- pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1-v):v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1-v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01}, \ \mathbf{R}_1 = (1-v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

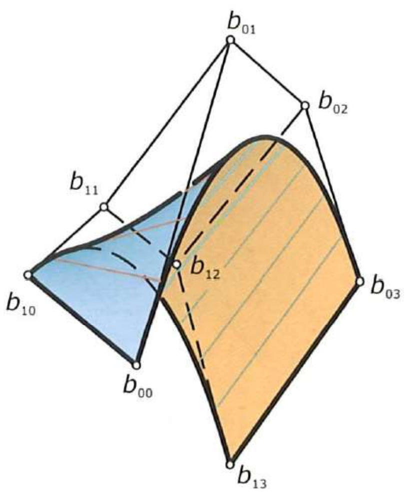
- u-křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1-u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(u,v) &= (1-u)(1-v)\mathbf{B}_{00} + \\
&+ (1-u)v\mathbf{B}_{01} + \\
&+ u(1-v)\mathbf{B}_{10} + \\
&+ uv\mathbf{B}_{11} = \\
&= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij}
\end{aligned}$$



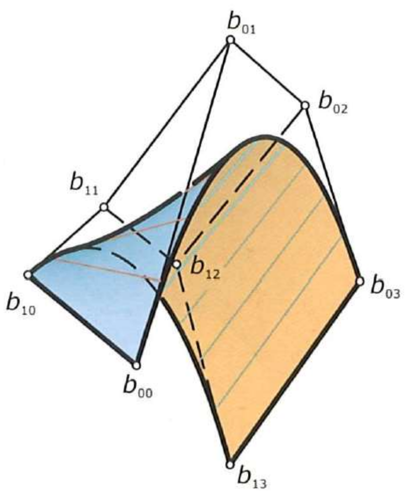
Přímkové Bézierovy plochy

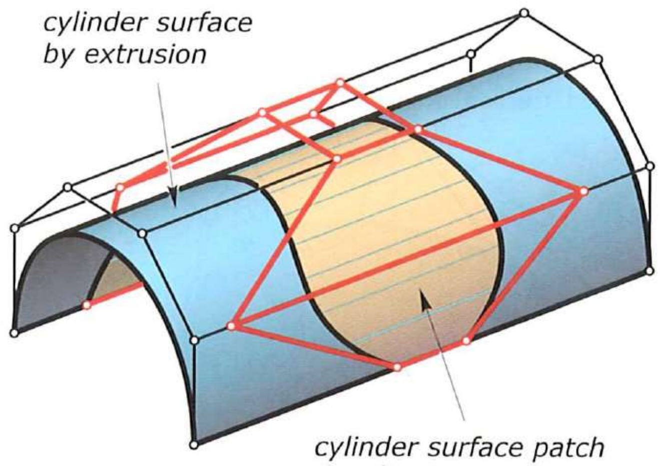
- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem



Přímkové Bézierovy plochy

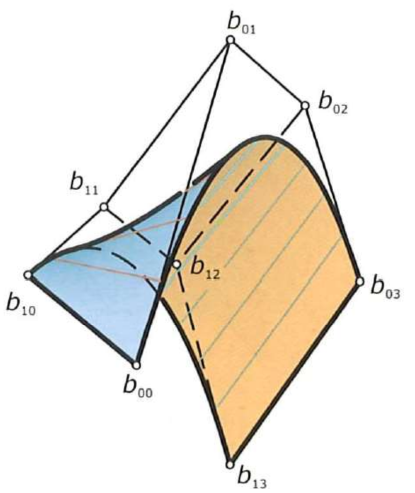
- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem

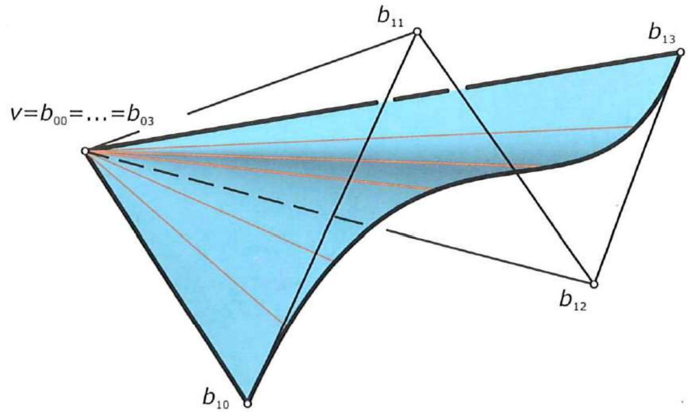


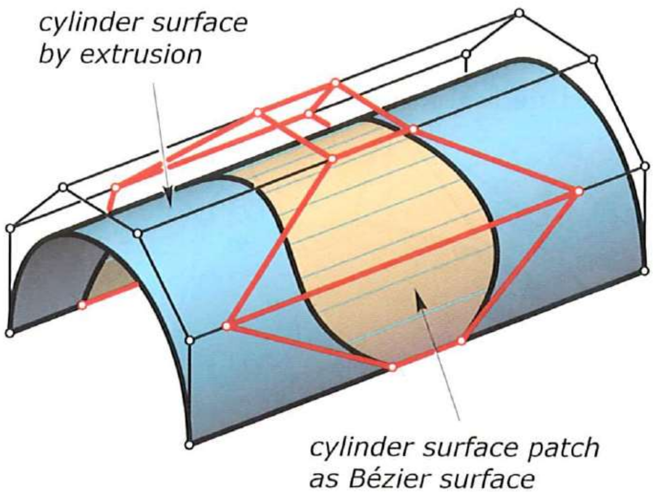


Přímkové Bézierovy plochy

- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem

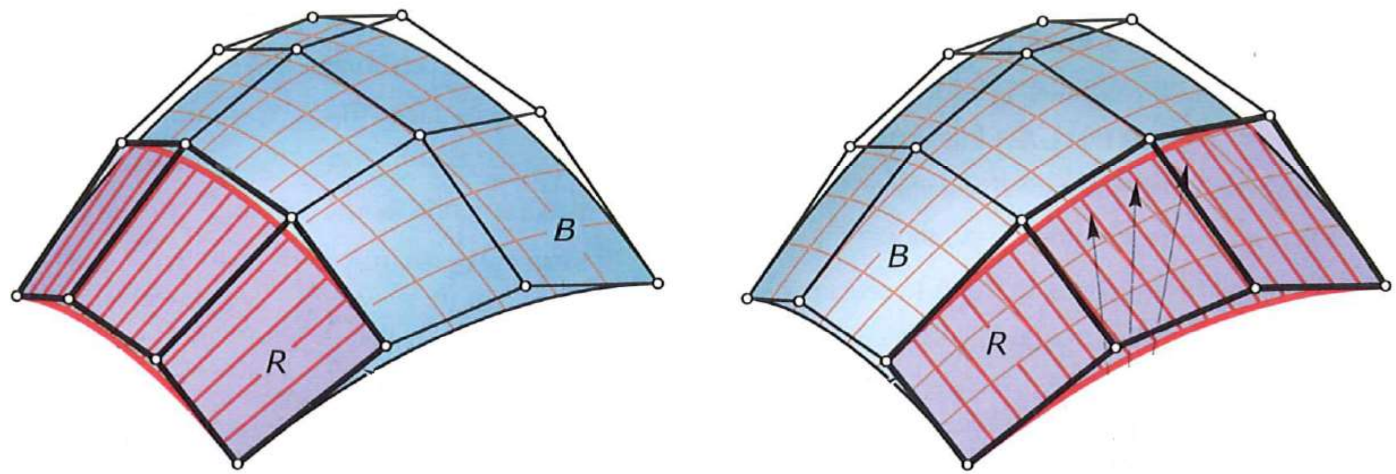






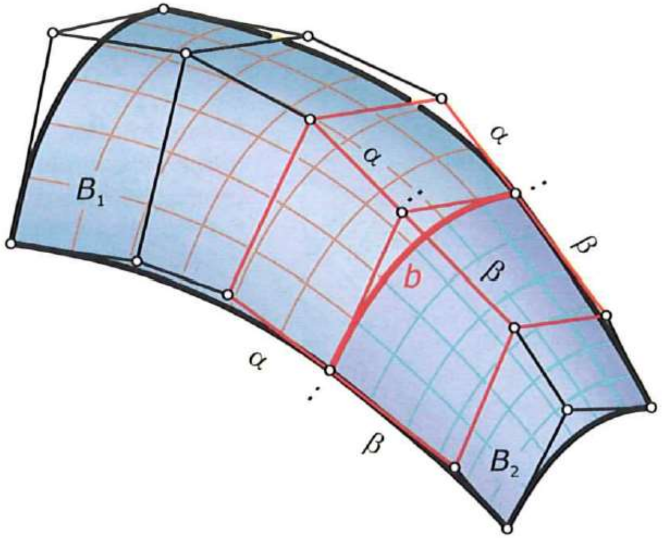
Hladké napojení Bézierových ploch

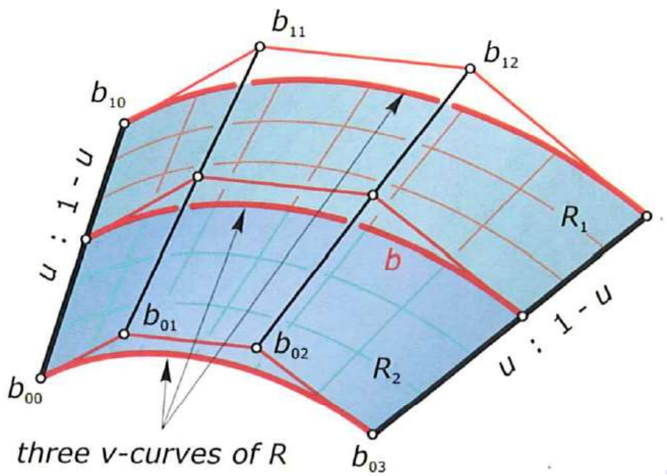
- vezmeme-li dvě poslední řady řídících bodů u libovolného okraje řídící sítě Bézierovy plochy, získáme řídící síť přímkové plochy, jejíž površky určují tečny v odpovídajích krajních bodech Bézierovy plochy – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- nechť máme dvě Bézierovy plochy $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, jejichž řídící sítě mají společný okraj
- potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé
- pro zajištění G^1, resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídícími sítěmi tečných přímkových ploch



Hladké napojení Bézierových ploch

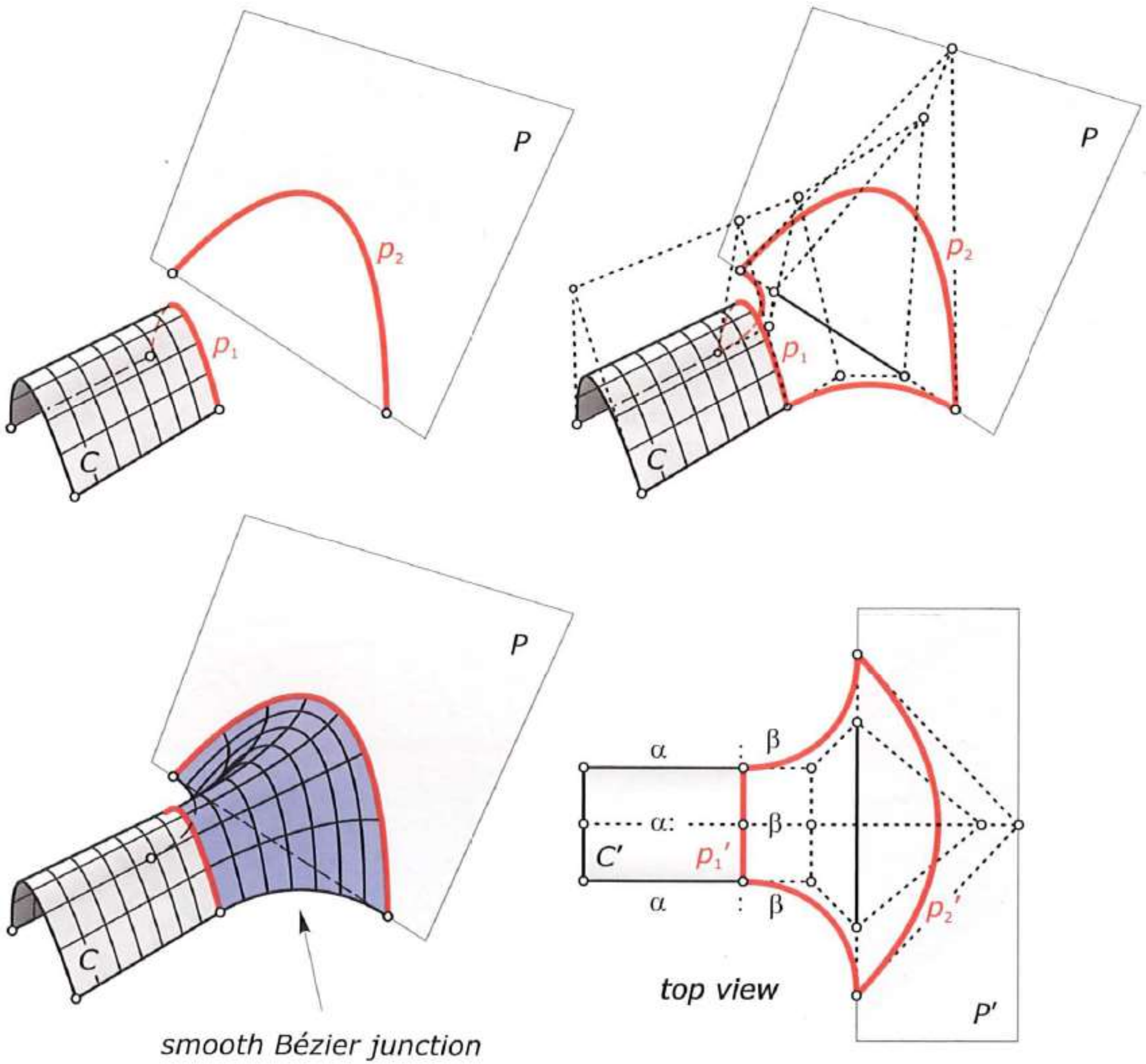
- vezmeme-li dvě poslední řady řídících bodů u libovolného okraje řídící sítě Bézierovy plochy, získáme řídící síť přímkové plochy, jejíž površky určují tečny v odpovídajích krajních bodech Bézierovy plochy – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- nechť máme dvě Bézierovy plochy $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, jejichž řídící sítě mají společný okraj
- potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé
- pro zajištění G^1, resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídícími sítěmi tečných přímkových ploch





Hladké napojení Bézierových ploch – příklad

- hladké napojení parabolického válce a roviny

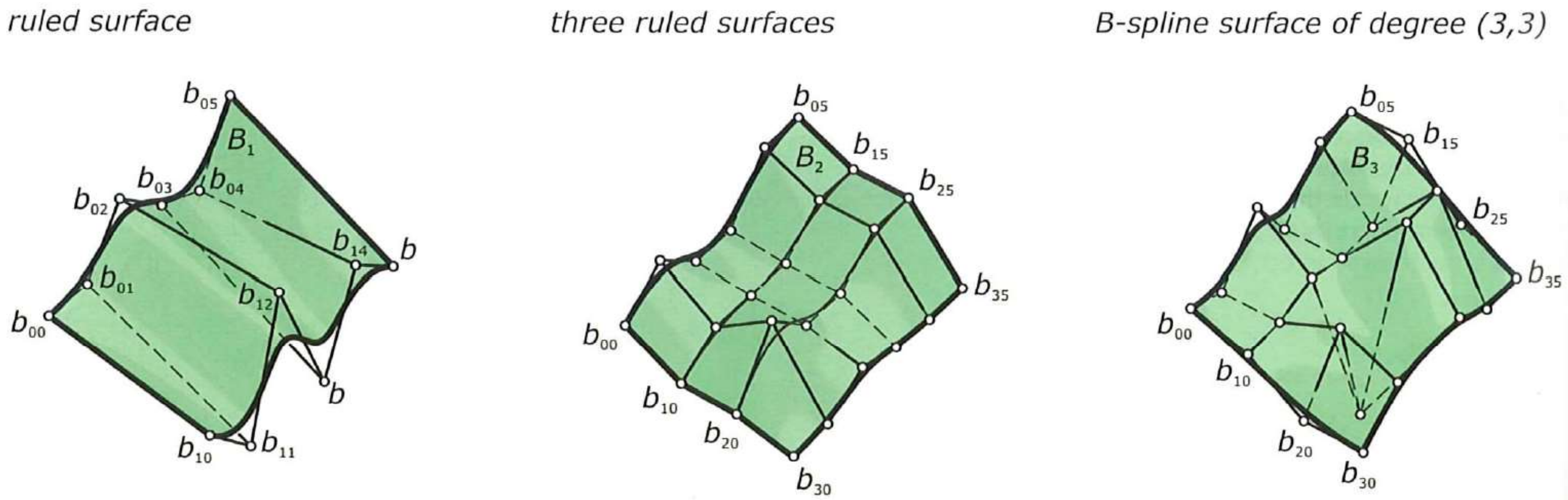


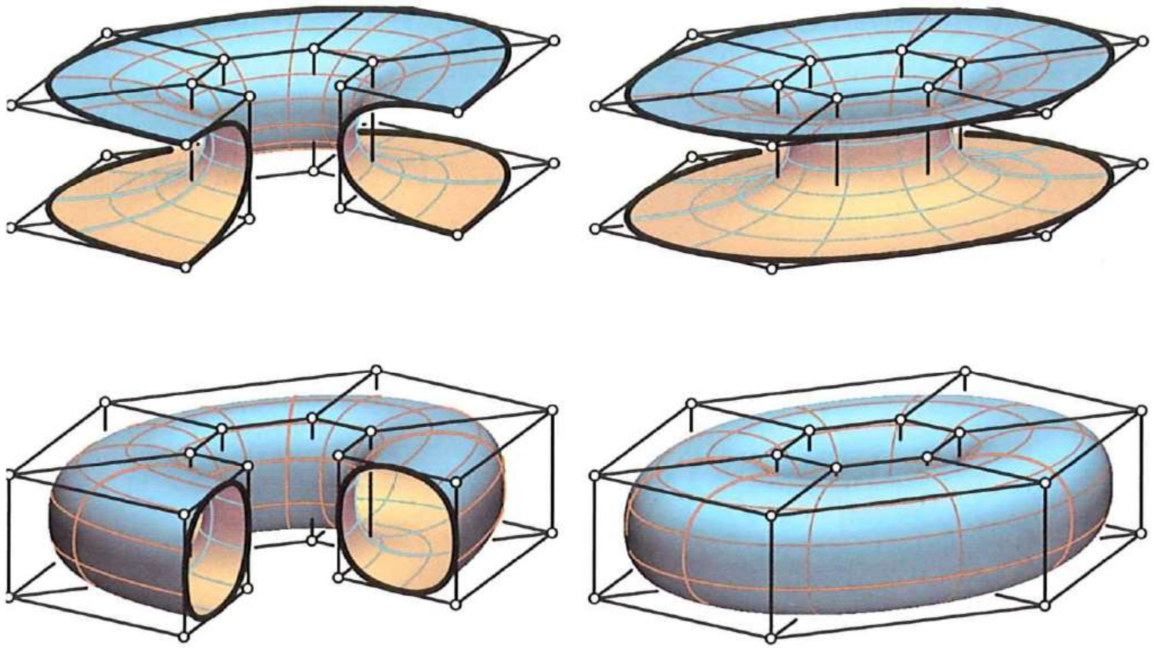
B-spline plochy

- jelikož Bézierovy plochy přímo vycházejí z Bézierových křivek, mají také stejné nevýhody – parametrizace jsou vysokého stupně, špatně zachycují tvar daný řídící sítí, změna polohy jednoho řídícího bodu mění celou výslednou plochu
- proto se podobně jako pro křivky zavádí pojem B-spline ploch
- B-spline plocha je určena čtyřúhelníkovou sítí řídících bodů, dvěma uzlovými vektory U a V (pro oba parametry u, v plochy) a stupni v u a v
- vlastnosti B-spline ploch se přenášejí z vlastností pro křivky:
    - uzlové vektory se chovají stejně (násobné uzly opět snižují spojitost),
    - plocha je lokálně modifikovatelná,
    - plocha leží v konvexním obalu řídící sítě a navíc, každá část plochy leží v konvexním obalu příslušné části řídící sítě (viz křivky)
    - afinní invariantnost
- pro danou řídící síť bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$ a pro dva uzlové vektory $U = (u_0, \ldots, u_k)$ a $V = (v_0, \ldots, v_l)$ je B-spline plocha stupně (p, q) dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

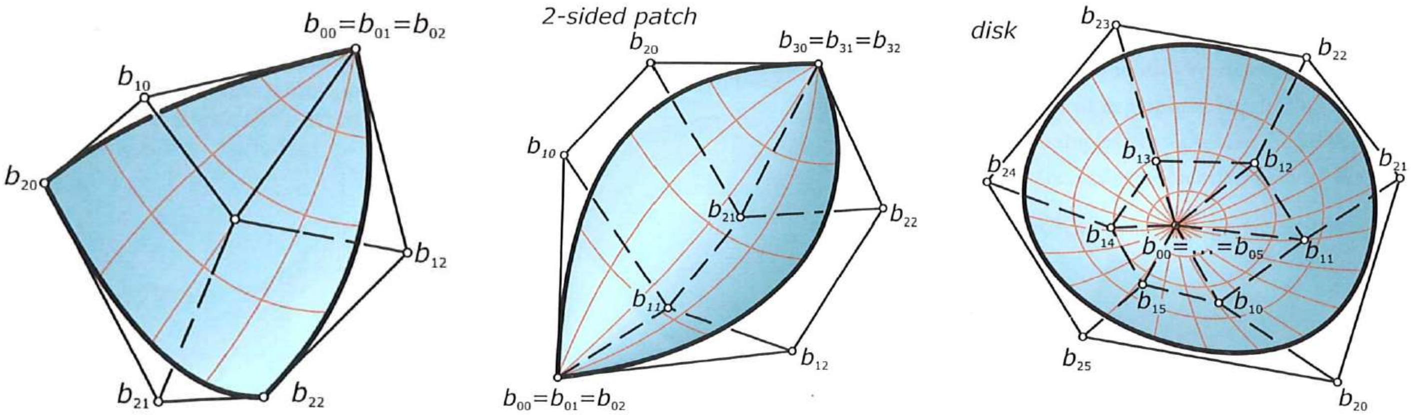
B-spline plochy – příklady



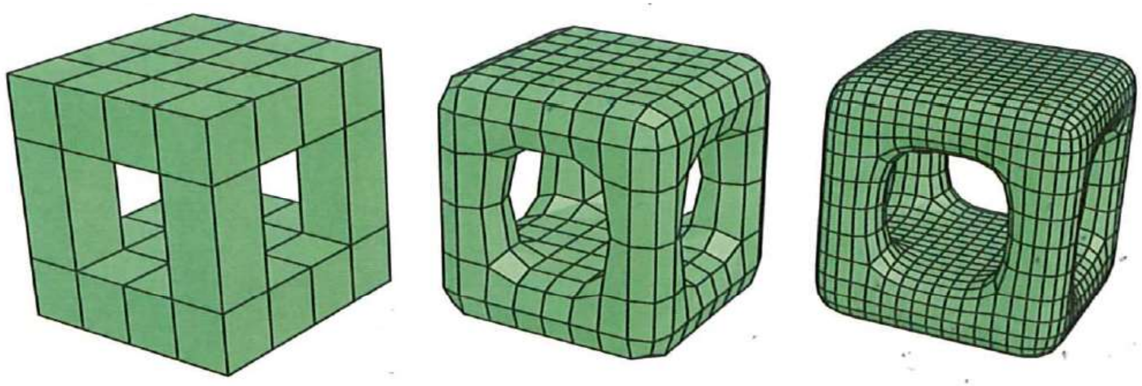


B-spline plochy – příklady

- pokud jeden nebo více řídící polygonů dané řídící sítě splyne do bodu, je možné vytvořit plochy s méně než čtyřmi okrajovými křivkami



- pomocí B-spline ploch je možné typicky popsat pouze objekty, jejichž topologie je shodná s topologií sféry – nelze tedy např. popsat objekty typu ...



NURBS plochy

- podobně je možné přímo zobecnit NURBS křivky a získat tzv. NURBS plochy
- NURBS plocha je určena řídící sítí bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich váhami $w_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$, dvěma uzlovými vektory $U = (u_0, \ldots, u_k)$ a $V = (v_0, \ldots, v_l)$ a stupni v u a v
- parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}$$