Lagrangeova a Hermitova interplace

ZS 2018/19

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

Lagrangeova interpolace

Definice: Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ a funkční hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je Lagrangeovým interpolantem těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

Věta: Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše n.

Lagrangeova interpolace

Definice: Pro zadané $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ definujeme Lagrangeovy polynomy

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pak pro interpolant z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x).$$

Lagrangeova interpolace

Věta: Mějme $g(x) \in \mathscr{C}^2\langle a, b\rangle$, tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu $\langle a, b\rangle$ a označme $K = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |g''(x)|$. Nechť $f(x)$ je (lineární) Lagrangeův interpolační polynom v bodech a, b, tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

Pak platí

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |g(x) - f(x)| \leqslant (b-a)^2 \frac{K}{4\cdot 2}.$$

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.
- Máme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ a hledáme polynom $f(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.
- Máme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ a hledáme polynom $f(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

- Úloha opět vede na soustavu lineárních rovnic.

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.
- Máme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ a hledáme polynom $f(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

- Úloha opět vede na soustavu lineárních rovnic.
- Příklad: nalezněte polynom stupně 2, pro který platí $f(1) = 9$, $f'(2) = 11$, $f''(4) = 4$.

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.
- Máme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ a hledáme polynom $f(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

- Úloha opět vede na soustavu lineárních rovnic.
- Příklad: nalezněte polynom stupně 2, pro který platí $f(1) = 9$, $f'(2) = 11$, $f''(4) = 4$.
- Pro $k_i = 0$ dostáváme Lagrangeovu interpolaci.

Hermitova interpolace

- Jedná se o zobecnění Lagrangeovy interpolace, kdy kromě hodnot interpolujeme i derivace.
- Máme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ a hledáme polynom $f(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

- Úloha opět vede na soustavu lineárních rovnic.
- Příklad: nalezněte polynom stupně 2, pro který platí $f(1) = 9$, $f'(2) = 11$, $f''(4) = 4$.
- Pro $k_i = 0$ dostáváme Lagrangeovu interpolaci.
- Pro $x_i = \tilde{x}$, $k_i = i$ a $f_i = g^{(i)}$ dostáváme Taylorův polynom pro funkci g v bodě $\tilde{x}$.

C^1 interpolace na $[0, 1]$

- Základní úloha je hledání polynomu stupně nejvýše 3, který nás zajímá na itervalu $[0, 1]$ a jsou pro něj předepsané hodnoty a derivace v krajních bodech 0 a 1, tedy

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = f_1, \quad f(1) = f_2, \quad f'(1) = f_3.$$

C^1 interpolace na $[0,1]$

- Základní úloha je hledání polynomu stupně nejvýše 3, který nás zajímá na itervalu $[0,1]$ a jsou pro něj předepsané hodnoty a derivace v krajních bodech 0 a 1, tedy
$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = f_1, \quad f(1) = f_2, \quad f'(1) = f_3.$$
- Polynom vyjádříme v monomiální bázi $\mathscr{M} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ jako
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
a koeficienty (a_0, a_1, a_2, a_3) pak dostaneme jako řešení soustavy
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Fergusonova báze

- Existuje báze $\mathscr{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x))$, ve které bude mít tato úloha jednotkovou matici? Tedy v důsledku bude pro interpolační polynom platit

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x).$$

Fergusonova báze

- Existuje báze $\mathscr{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x))$, ve které bude mít tato úloha jednotkovou matici? Tedy v důsledku bude pro interpolační polynom platit

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x).$$

- Například pro $r_0(x)$ by muselo platit

$$r_0(0) = 1, \quad r_0'(0) = 0, \quad r_0(1) = 0, \quad r_0'(1) = 0.$$

Fergusonova báze

- Existuje báze $\mathscr{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x))$, ve které bude mít tato úloha jednotkovou matici? Tedy v důsledku bude pro interpolační polynom platit

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x).$$

- Například pro $r_0(x)$ by muselo platit

$$r_0(0) = 1, \quad r_0'(0) = 0, \quad r_0(1) = 0, \quad r_0'(1) = 0.$$

- Nebo rychleji: předchozí matice musí být maticí přechodu $[id]^{\mathscr{M}}_{\mathscr{R}}$, protože analogická úloha v bázi $\mathscr{R}$ má mít z definice jednotkovou matici. Z toho důvodu máme

$$[id]^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fergusonova báze

- V této poslední matici po sloupečccích čteme koeficienty Fergusonovy báze vůči monomiální bázi a tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\
r_1(x) &= t - 2x^2 + x^3 \\
r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\
r_3(x) &= -x^2 + x^3.
\end{aligned}
$$

Fergusonova báze

- V této poslední matici po sloupečcích čteme koeficienty Fergusonovy báze vůči monomiální bázi a tedy dostáváme

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= t - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

- Jakou matici bude úloha mít v Bernsteinově kubické bázi $\mathscr{B} = \big(B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\big)$, kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$?

Hermitova báze

Věta: Mějme $g(x) \in \mathscr{C}^4\langle a, b\rangle$, tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu $\langle a, b\rangle$ a označme $K = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |g''''(x)|$. Nechť $f(x)$ je C^1 Hermitův interpolační polynom na intervalu $\langle a, b\rangle$, tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

Pak platí

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |g(x) - f(x)| \leqslant (b-a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

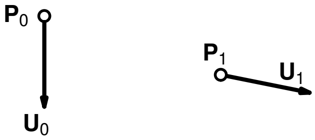
Aproximace metodou nejmenších čtverců

- máme zadány funkční hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{R}$ ve velkém množství bodů $x_0 < x_1 < \ldots < x_N \in \mathbb{R}$ a hledáme funkci $f(x)$, která bude přibližně splňovat
$$f(x_i) \approx f_i.$$
- Funkci hledáme v nějakém konečně dimenzionálním prostoru $f(x) \in LO\{b_1(x), \ldots, b_k(x)\}$ jako minimum výrazu
$$\sum_{i=0}^{N} (f(x_i) - f_i)^2$$
- Vyjádříme
$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i b_i(x)$$
a pak nalezení minima vede na soustavu k rovnic s neznámými α_j.

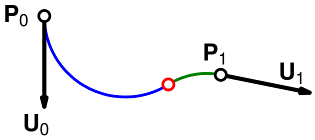
Interpolace a aproximace pro křivky

- Můžeme provést Lagrangeovu nebo Hermitovu interpolaci či nějakou aproximaci na každou složku (x, y, z) zvlášť.
- Vyhodnocení chyby začne být problematičtější.
- Musíme pracovat na stejném intervalu, nebo křivku reparametrizovat například na $\langle 0, 1 \rangle$ (změní se velikost derivace).
- Existují i čistě geometrické interpolace, které nezávisí na parametrizaci, např. interpolace kruhovým dvojobloukem.

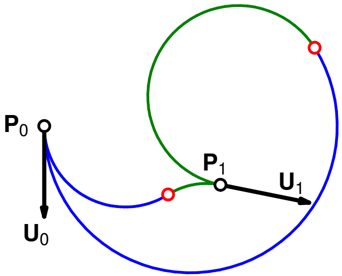
Geometrická interpolace dvojoblouky



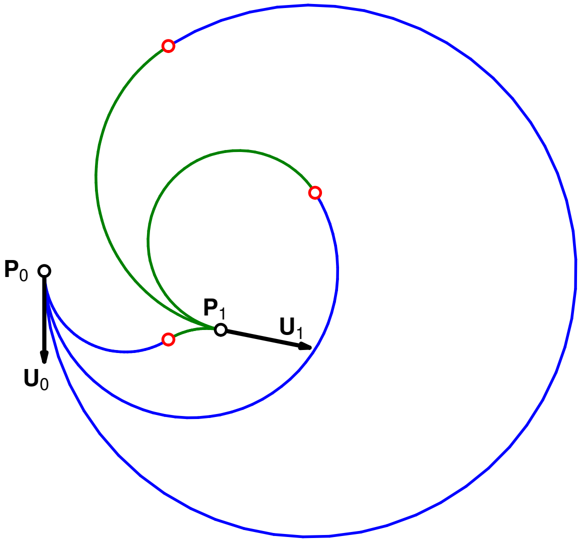
Geometrická interpolace dvojoblouky



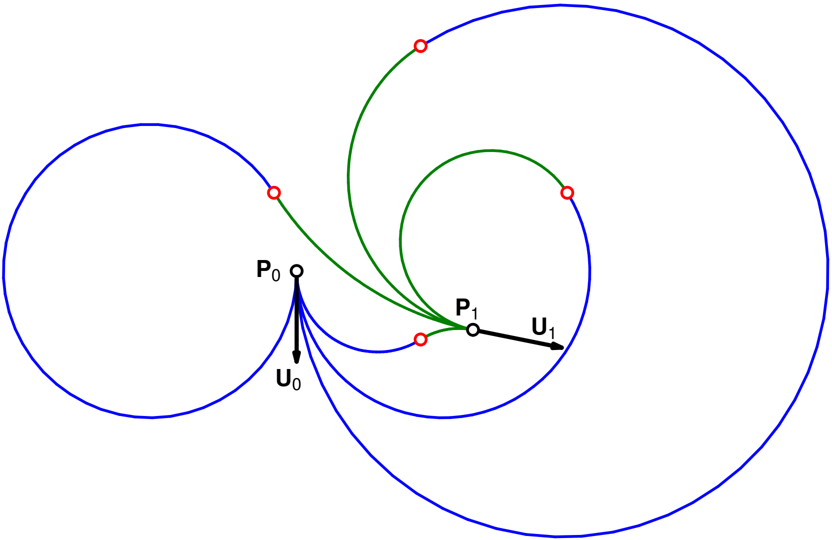
Geometrická interpolace dvojoblouky



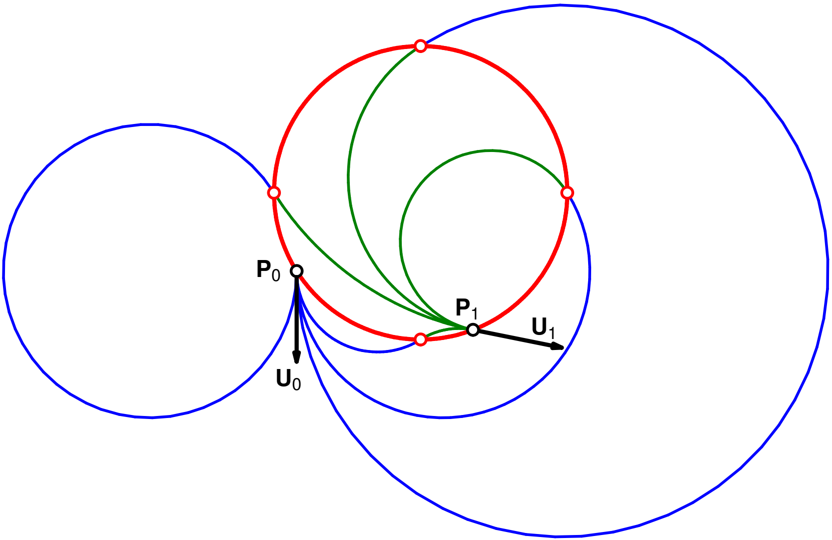
Geometrická interpolace dvojoblouky



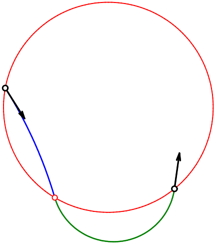
Geometrická interpolace dvojoblouky



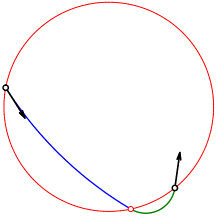
Geometrická interpolace dvojoblouky



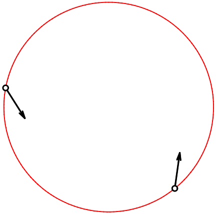
Výběr vhodného dvojoblouku



Stejné sečny



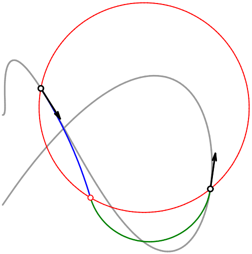
Rovnoběžná tečna



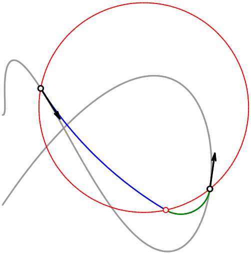
Bod na křivce

Věta:
Mějme dána G^1 Hermitovská data v rovině, tedy body P_0, P_1 a jednotkové vektory U_0, U_1. Označme K jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body P_0, P_1 a s vektory U_0, U_1 svírá stejně velký orientovaný úhel. Nechť $J \in \mathbb{R}^2$ je libovolný bod různý od P_0, P_1. Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_0 interpolující data P_0, U_0 a J a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_1 interpolující data J, P_1, U_1. Tyto dva oblouky navazují v bodě J se spojitostí G^1 právě tehdy, když $J \in K$.

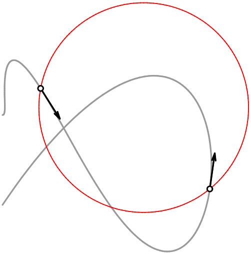
Výběr vhodného dvojoblouku



Stejné sečny

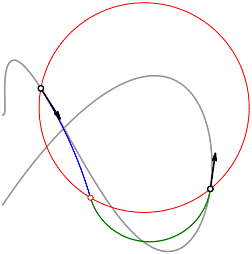


Rovnoběžná tečna

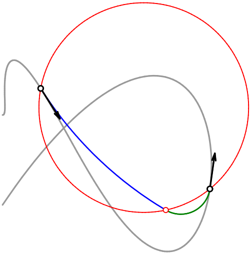


Bod na křivce

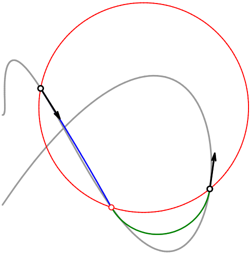
Výběr vhodného dvojoblouku



Stejné sečny



Rovnoběžná tečna



Bod na křivce

Měření chyby pro funkce a pro křivky

- Pro vzdálenost dvou funkcí $f(x)$, $g(x)$ na stejném intervalu $[a, b]$ obvykle
  - $\mathscr{L}^\infty$ normu
$$||f-g||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$
  - nebo $\mathscr{L}^2$ normu
$$||f-g||_2 = \int_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x$$
- Pro křivky parametrizované na stejném intervalu můžeme tyto normy použít na každou složku zvlášť a pak sečíst.
- Spíše ale využijeme Hausdorfovy vzdálenosti, která je pro libovolné množiny **X**, **Y** definována jako
$$H(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \max\left(\max_{x\in\mathbf{X}}\min_{y\in\mathbf{Y}} ||x-y||, \max_{y\in\mathbf{Y}}\min_{x\in\mathbf{X}} ||x-y||\right).$$

Asymptotické zlepšování chyby

	Error	Ratio		Error	Ratio
1	4.97				
2	2.23	2.233	256	$3.32\ 10^{-5}$	5.552
4	$3.98\ 10^{-1}$	5.594	512	$4.32\ 10^{-6}$	7.699
8	$1.89\ 10^{-1}$	2.110	1024	$5.45\ 10^{-7}$	7.928
16	$4.02\ 10^{-2}$	4.697	2048	$6.82\ 10^{-8}$	7.988
32	$5.93\ 10^{-3}$	6.780	4096	$8.57\ 10^{-9}$	7.956
64	$1.03\ 10^{-3}$	5.767	8192	$1.07\ 10^{-9}$	7.979
128	$1.85\ 10^{-4}$	5.568	16384	$1.34\ 10^{-10}$	8.009

Aproximační stupeň 3.