Geometrické modelování

Křivky v rovině a jejich transformace

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

Teorie rovinných křivek

Definice

Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^2$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Reparametrizace křivek

Poznámka

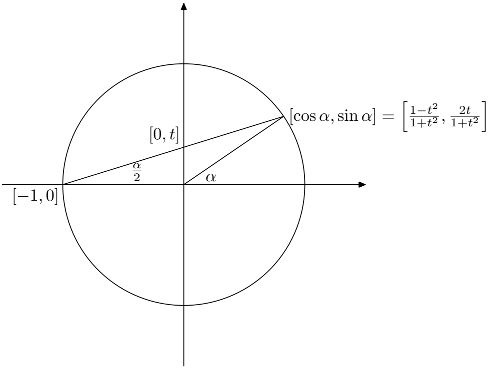
Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na I, tedy $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$. Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby $\mathbf{c}$ a ϕ bylo třídy C^∞, ale podle situace postačí nižší hladkost, například C^1, C^2, C^3.

Definice

Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Parametrizace kruhového oblouku

- Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.
- Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.
  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, kde $t = \tan(\alpha/2)$.



- Dále můžeme reparametrizovat pomocí $t = \frac{As+B}{Cs+D}$,t.j. lineární lomené funkce.

Délka křivky

Definice a lemma

Délku křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t), t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} ||\mathbf{c}'(t)||dt,$$

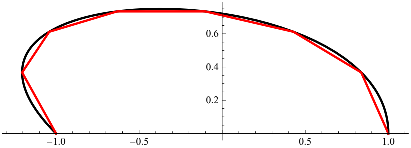
který nezávisí na parametrizaci. Funkci rychlosti budeme označovat $r(t) = ||\mathbf{c}'(t)||$.

Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \ldots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$.

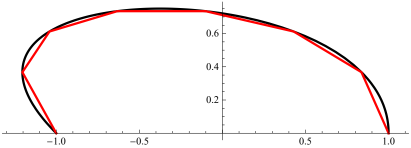


Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \ldots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$.



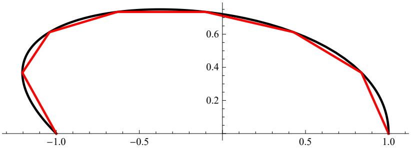
- Je možno volit například rozdělení rovnoměrné v parametru

$$t_i = \alpha + \frac{i}{m}(\beta - \alpha) = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\alpha + \frac{i}{m}\beta.$$

Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Platí, že délka křivky je suprémem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

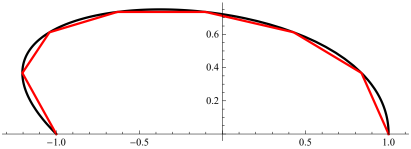
$$L(c) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta\right\}.$$



Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Platí, že délka křivky je suprémem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

$$L(c) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta\right\}.$$



- Platí, že délka lomené čáry L_m k délce křivky L konvergue pro $m \to \infty$ jako $\mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$, tedy existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro každé m platí

$$(L - L_m) < \frac{K}{m^2}.$$

Nebudeme dokazovat, ale ověříme implementací v DU.

Tečný a normálový vektor

Definice a lemma

V každém bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}.$$

Dále definujeme normálový vektor $\mathbf{n}_*(t)$ tak, aby $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$ byla kladně orientovaná ortonormální báze $\mathbb{R}^2$. Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

Znaménková křivost

Definice a lemma

Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

Přímé shodnosti

Definice a lemma

Označme souřadnice bodů v rovině $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Eukleidovské shodnosti (isometrie) jsou právě zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{a}$, kde A je orthonormální matice. Takovou shodnost nazýváme přímou, právě když $\det(A) = 1$. Každá přímá shodnost je posunutí (tedy $A = I$) nebo otočení (okolo vhodného bodu).

Věta

Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou invariantní vůči přímým shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji mějme přímou shodnost ve tvaru $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Máme-li křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném (neinflexním) bodě κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$, pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = \kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = A\mathbf{n}_*$.

Tečná přímka a oskulační kružnice

Definice

Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Věta

Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

Význam znaménkové křivosti

Věta

Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

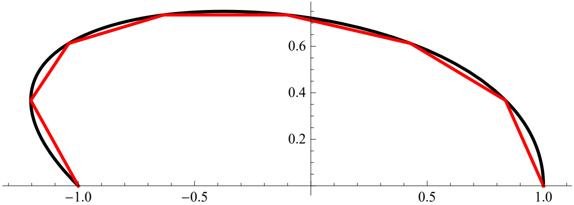
$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $r(t) = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce $r(t)$ a $\kappa_z(t)$ určují křivku až na přímou shodnost.

Odhad znaménkové křivosti



Znaménkovou křivost lze přibližně vypočítat z vepsané lomené čáry. Definujme $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$ a pak lze například přibližně počítat

$$\kappa_z(t_i) \approx \arcsin\left(\frac{\det\{\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_{i+1}\}}{||\vec{\mathbf{v}}_i||||\vec{\mathbf{v}}_{i+1}||}\right) \frac{2}{||\vec{\mathbf{v}}_i|| + ||\vec{\mathbf{v}}_{i+1}||}.$$