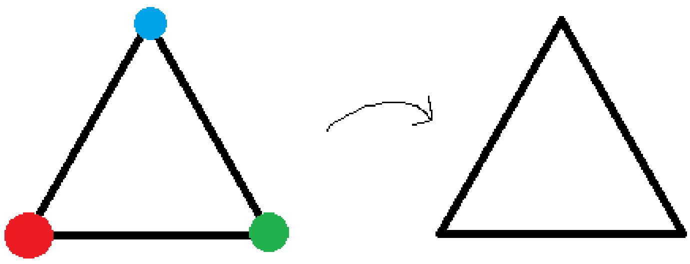
Domácí úkol Variace na invarianci 2. série Jaroslav Herman

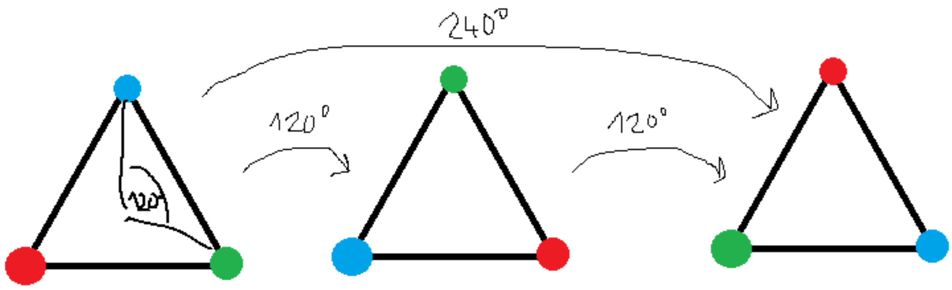
Začneme trojúhelníkem. Zkusme umístit trojúhelník s barevně označenými vrcholy na podkladový trojúhelník



Vyberme třeba červený vrchol. Ten můžeme umístit na libovolný ze tří vrcholů podkladového trojúhelníka. To jsou tedy tři možnosti. Po umístění do jedné pozice pak máme dvě osově symetrické možnosti, kam umístit třeba modrý vrchol. Zelený vrchol pak již bude určený jednoznačně. Celkově tedy máme $3 \cdot 2 = 6$ možností.

Opravdu má grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka 6 prvků. Prvním z nich je jednoduše identita. Když tedy někam umístíme trojúhelník, identita s ním nic neudělá.

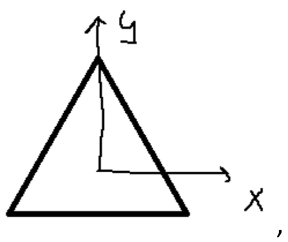
Dalšími prvky symetrie jsou rotace, a to $120°$ a $240°$. Úhly mezi spojnicemi úseček jdoucích z těžiště k vrcholům totiž tyto úhly svírají. Proto se tyto úsečky (nebo vektory) zobrazí samy na sebe (ale poloha bodů se vymění). Rotace o $360°$ je již zmíněná identita.

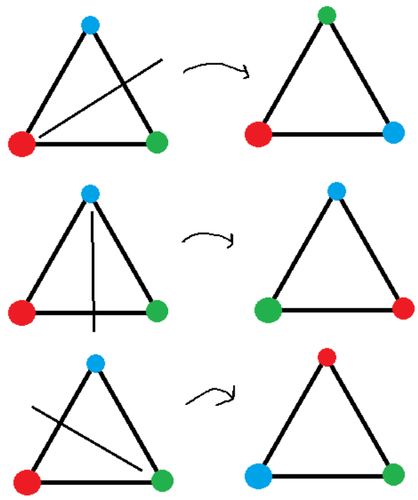


Vidíme, že už tato tři zobrazení tvoří grupu, protože jejich kombinací se vždycky vytvoří nějaký z těchto tří obrazců.

Další symetrie jsou očividně osové souměrnosti podle osy procházející vrcholem a těžištěm. Takové osy jsou tři.

Jestliže zavedeme souřadnou soustavu tak, že počátek se nachází v těžišti a osy podle následujícího obrázku



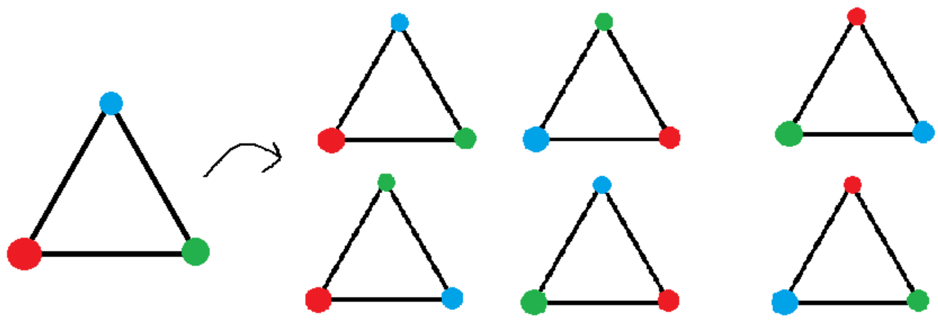


pak osy souměrnosti jsou $x = 0$, $y = x \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ a $y = -x \sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

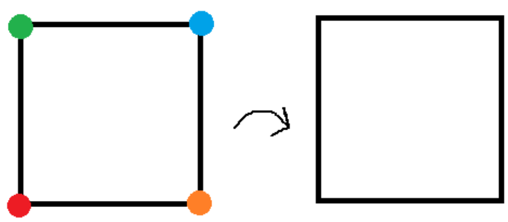
Grupu symetrií máme kompletní. Mohli bychom její prvky zapsat pomocí matic

- identita $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ rotace o $120°$,
- $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ rotace o $240°$,
- $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ překlopení podle $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ překlopení podle $x = 0$,
- $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ překlopení podle $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Graficky

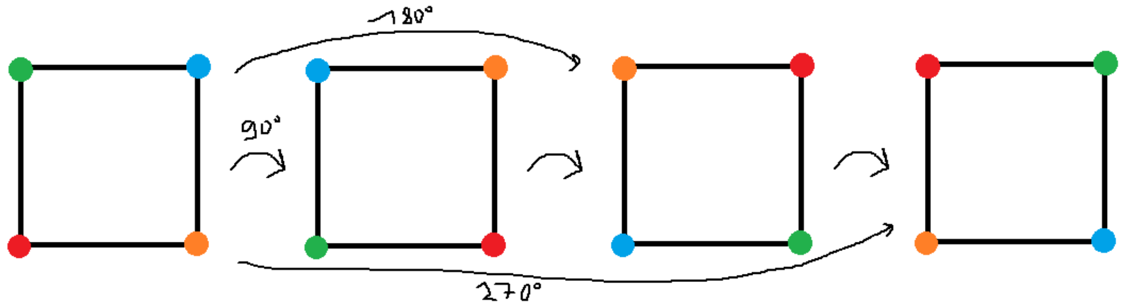


Pro <u>čtverec</u> si zase obarveme vrcholy a zkusme spočítat, kolika způsoby ho můžeme umístit na podklad



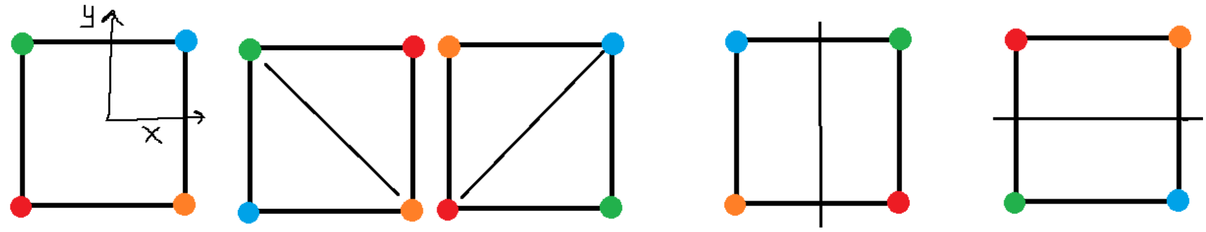
Vyberme třeba červený bod. Ten můžeme umístit do čtyř pozic. Na každé z těchto pozic můžeme čtverech překlopit podle diagonály, takže pro každé umístění červeného vrcholu máme další dvě možnosti. Celkem tedy $4 \cdot 2 = 8$ možností.

Podobně jako u trojúhelníku začneme rotacemi, tentokrát jsou to rotace o $90°, 180°$ a $270°$, protože úhel u středu čtverce ke dvěma sousedním vrcholům je $90°$. Rotace o plný úhel je další prvek grupy, identita.



Opět už samotné rotace tvoří grupu.

Další symetrie jsou překlopení podle obou diagonál a podle spojnic středů protějších stran. Znova si můžeme zavést souřadnou soustavu se středem ve středu čtverce. Pak překlopení jsou podle os $x = y, y = -x, y = 0, x = 0$.



Můžeme napsat i matice jednotlivých zobrazení

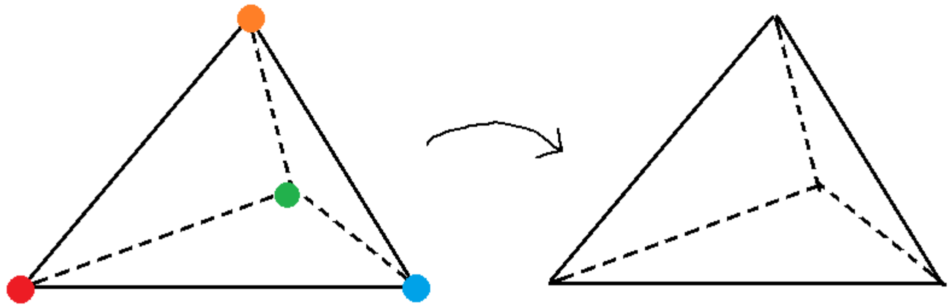
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ identita,
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rotace o $90°$,
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ rotace o $180°$,
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rotace o $270°$,
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ překlopení podle $y = -x$,
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ překlopení podle $y = x$,
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ překlopení podle $x = 0$,
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ překlopení podle $y = 0$.

Můžeme ověřit, že se jedná o grupu tím, že pronásobíme libovolné dvě matice spolu

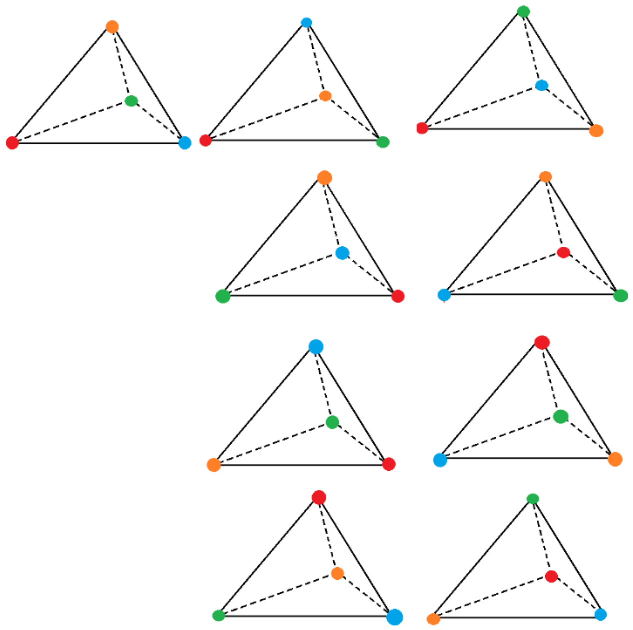
$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že všechny výsledky jsou prvky grupy symetrií.

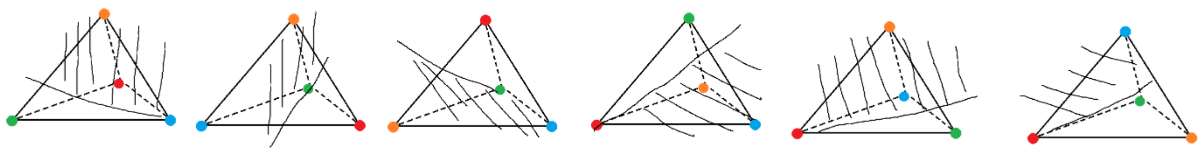
Nyní se pokusme umístit čtyřstěn. Vyberme třeba červený bod. Ten můžeme umístit do čtyř vrcholů čtyřstěnu. Pak vyberme třeba modrý, ten má tři možnosti, a dvě možnosti zbývají třeba pro zelený. Poslední vrchol je již umístěn jednoznačně. Celkově máme $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ možností.



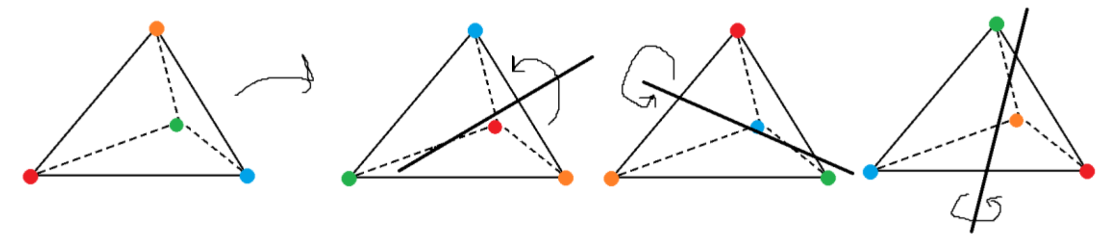
Jelikož čtyřstěn je složený z trojúhelníků, můžeme již získané výsledky využít. Jednotlivé strany necháme rotovat kolem přímky procházející těžištěm strany a protějším vrcholem.



Též můžeme provést překlopení podle rovin procházejících nějakou hranou a které jsou kolmé na protější hranu v jejím středu.

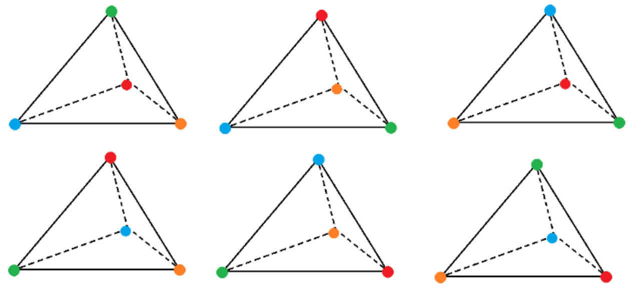


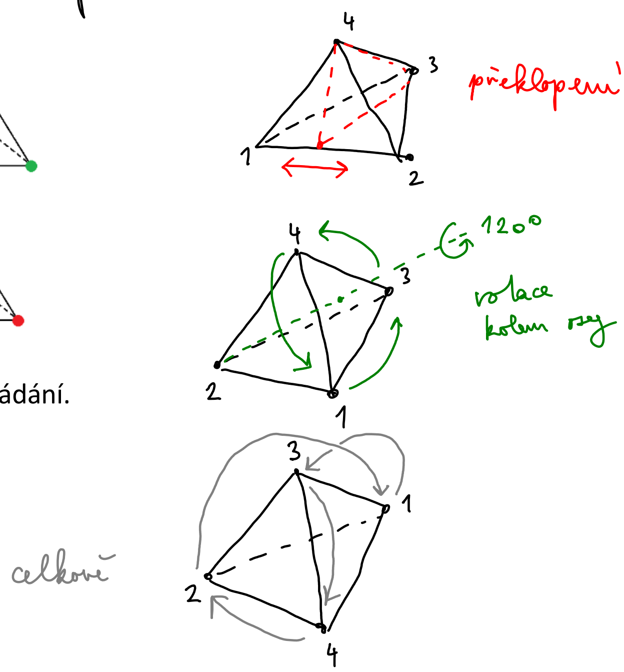
Ještě můžeme nechat vrcholy čtyřstěnu rotovat kolem osy spojující středy protějších hran. Takové osy jsou tři.



Tyto situace jsou ale také složeny ze dvou překlopení.

Posledních šest poloh nemůže vzniknout rotací ani překlopením z původní polohy. Jsou složeny z předešlých zobrazení. Konkrétně jednoho překlopení a rotace.





Všechny grupy jsou uzavřeny do sebe s operací skládání.