**Úvod do komplexní analýzy**
**ZS 2022/23, MFF UK**

SADA PŘÍKLADŮ 4

## Mocninné řady

Najděte $z \in \mathbb{C}$, ve kterých konvergují následující mocniné řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n\, 5^n}$

b) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{R}^+$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$

d) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$

f) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n,\ a, b > 0$

**Řešení a)** $R = 5$, KNA na $K_5(3) \setminus \{8\}$, v $\{8\}$ NK,
**b)** pro $a < 0$ je $R = +\infty$, pro $a = 1$ je $R = 1$, pro $a > 0$ je $R = 0$, pro $a = 1$ na $K_1(0)$ NK,
**c)** $R = \frac{1}{e}$, na $K_{\frac{1}{e}}(0)$ NK
**d)** $R = 1$, pro $p > 1$ KA na $K_1(0)$, pro $0 \leq p \leq 1$ KNA na $K_1(0) \setminus \{1\}$, jinak na $K_1(0)$ NK,
**e)** $R = 1$, na $K_1(0) \setminus \{1\}$ KNA, v $z = 1$ NK
**f)** $R = 2^p$, pro $0 \leq p \leq 2$ KNA na $K_R(0) \setminus \{-2^p\}$
**g)** $R = 1$, KNA na $K_1(0) \setminus \{e^{i\frac{k\pi}{2}},\ k = 0, 1, 2, 3\}$
**h)** $R = \min\{1/a, 1/b\}$, KNA na $K_R(0) \setminus \{R\}$

Zkratky: $R\ldots$ poloměr konvergence mocninné řady, $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| = R\}$,
KA … konverguje absolutně, KNA … konverguje neabsolutně, NK … nekonverguje
$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \cdot 2$,
$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1$

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.