Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

SADA PŘÍKLADŮ 2

Limity a derivace funkce jedné komplexní proměnné

(1) Které z následujících funkcí lze spojitě dodefinovat v nule?

a) $\frac{\Re z}{z}$ b) $\frac{(\Re z)^2}{z}$ c) $\frac{\Re z^2}{z^2}$ d) $\frac{|z|\Im z}{z}$

(2) V kterých bodech mají následující funkce derivace podle komplexní proměnné?

a) $\bar{z}$ b) $|z|$ c) $|z|^2$ d) $|z|^2 + \mathbf{i}\Re(z^2)$

Řešení 1. **a**) NE, **b**) ANO, **c**) NE, **d**) ANO, **2.** **a**) $\emptyset$, **b**) $\emptyset$, **c**) $\{0\}$, **d**) $\{z : \Re z = -\Im z\}$.

Cauchy-Riemannovy podmínky

Značení $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{x : x \in \mathbb{R}, x \le 0\}$

(3) Ukažte, že v polárních souřadnicích na $\mathbb{C}_-$ mají Cauchy-Riemannovy podmínky tvar

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \; r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Polárními souřadnicemi na $\mathbb{C}_-$ rozumíme vyjádření $z = x + \mathbf{i}y = re^{\mathbf{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ neboli $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

(4) K zadané funkci $u : U \to \mathbb{R}$ a otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$ najděte $v : U \to \mathbb{R}$ tak, aby funkce $u + \mathbf{i}v$ byla holomorfní na U. Případně ukažte, že taková funkce neexistuje.

a) $u(x + \mathbf{i}y) = x^2 - y^2 + x$, $U = \mathbb{C}$ b) $u(x + \mathbf{i}y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $U = \mathbb{C}^*$

c) $u(x + \mathbf{i}y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $U = \mathbb{C}^*$ a $U = \mathbb{C}_-$ d) $u(x + \mathbf{i}y) = \sin x \cosh y$

(Nápověda: V příkladu c) využijte předchozí cvičení.)

Řešení 4. **a**) $2xy + y$, **b**) $-\frac{y}{x^2+y^2}$, **c**) na $\mathbb{C}^*$ funkce v neexistuje, na $\mathbb{C}_-$ jest $v(re^{\mathbf{i}\varphi}) = \varphi$, **d**) $\cos x \sinh y$.

Elementární funkce

(5) Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí:

a) $\exp(1+\mathbf{i})$ b) $\cos(2+\mathbf{i})$ c) $\sin 2\mathbf{i}$ d) $\log \mathbf{i}$

(6) Najděte všechna řešení (v $\mathbb{C}$) následujících rovnic:

a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sin z - \cos z = \mathbf{i}$

(7) Najděte všechny možné hodnoty

a) $1^{\sqrt{2}}$ b) $(-2)^{\sqrt{2}}$ c) $2^{\mathbf{i}}$ d) $\left(\frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathbf{i}}$

(8) Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ sečtěte

a) $\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)$ b) $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos((2n+1)x)$

(Návod: Uvažujte součet řady $1 + e^{\mathbf{i}x} + \cdots + e^{\mathbf{i}nx}$ pro $n \in \mathbb{N}$.)

Řešení 5. **a**) $\exp 1 \cos 1$; $\exp 1 \sin 1$, **b**) $\cos 2 \cosh 1$; $-\sin 2 \sinh 1$, **c**) 0; $\sinh 2$, **d**) 0; $\frac{\pi}{2}$,
6. **a**) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \mathbf{i}\ln(\sqrt{2} \pm 1),\ k \in \mathbb{Z}$, **b**) $\frac{\pi}{4} + k\pi + \mathbf{i}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+(-1)^k}{\sqrt{2}}\right),\ k \in \mathbb{Z}$,
7. **a**) $\exp(2\sqrt{2}\,k\,\pi\mathbf{i}),\ k \in \mathbb{Z}$, **b**) $2^{\sqrt{2}}\exp(\sqrt{2}(2k+1)\pi\mathbf{i}),\ k \in \mathbb{Z}$, **c**) $\exp(\mathbf{i}\ln 2)\exp(2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$,
d) $\frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\exp(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$,
8. **a**) $\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, **b**) $\frac{\sin\left(2(n+1)x\right)}{2\sin x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.