Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

Sada příkladů 1

Řešení vybraných příkladů

Nejprve si řekneme, jak najít všechny n-té odmocniny z 1, kde $n \in \mathbb{N}$, neboli všechny kořeny polynomu $z^n - 1$. Jedná se o polynom n-tého stupně, má tedy maximálně n kořenů. Označme jako φ argument $\arg w$ komplexního čísla w. (Z definice $\arg w$ je velikost úhlu, který svírá vektor w s kladnou poloosou x. Zde přirozeně ztotožňujeme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ a φ budeme pro pohodlí uvažovat z intervalu $[0, 2\pi)$). Z Moivreovy věty plyne

$$\begin{aligned} w^n = (|w| \exp(\mathbf{i}\varphi))^n &= \big(|w|(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\big)^n \\ &= |w|^n \big(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi)\big) \\ &= |w|^n \exp(n\mathbf{i}\varphi),\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jestliže má platit $w^n = 1 = e^0$, pak nutně $|w| = 1$ a $n\varphi = 0\ mod\ 2\pi$. Zde zápis $a = b\ mod\ 2\pi$ značí, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $a - b = 2k\pi$. Tudíž $\varphi = \frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Našli jsme tedy celkem n různých n-tých odmocniny z 1, a to

$$\begin{aligned} \exp(\frac{0}{n}\pi\mathbf{i}) &= \cos(\frac{0}{n}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{0}{n}\pi) = 1, \\ \exp(\frac{2}{n}\pi\mathbf{i}) &= \cos(\frac{2}{n}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{2}{n}\pi), \\ &\vdots \\ \exp(\frac{2(n-1)}{n}\pi\mathbf{i}) &= \cos(\frac{2(n-1)}{n}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{2(n-1)}{n}\pi). \end{aligned}$$

Jelikož víc n-tých odmocnin z jedné být nemůže, tak jsme našli všechny.

Označme $q := \exp(\frac{2}{n}\pi\mathbf{i})$. Všimněte si, že $q^k = \exp(\frac{2k}{n}\pi\mathbf{i})$ a všechny n-té odmocniny z 1 jsou tvaru

$$q, q^2, \cdots, q^{n-1}, q^n = 1.$$

Speciálně n-té odmocniny z 1 tvoří cyklickou grupu řádu n a q je generátor této grupy. Dále $q, \cdots, q^n$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

(3.b) Najděte všechny hodnoty komplexních odmocnin $\sqrt[3]{1+\mathbf{i}}$.

Řešení: Máme najít všechna řešení rovnice $z^3 = 1 + \mathbf{i}$ neboli máme najít všechny kořeny polynomu $z^3 - (1+\mathbf{i})$. Jedná se o polynom třetího stupně, má tedy maximálně tři kořeny. Jsou-li z_1, z_2 dva různé kořeny, pak zřejmě $z_1 \neq 0$ a $z_2 \neq 0$ a $(z_1/z_2)^3 = z_1^3/z_2^3 = (1+\mathbf{i})/(1+\mathbf{i}) = 1$, tj. z_1/z_2 je třetí odmocnina z 1. Naopak jestliže $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje $\alpha^3 = 1$, pak $(z\alpha)^3 = z^3\alpha^3 = z^3$. Vidíme tedy, že nám stačí najít všechny třetí odmocniny z 1 a pak nějakou odmocninu z $1 + \mathbf{i}$.

Podle postupu uvedéno nahoře najdememe všechny třetí odmocniny z 1, jsou to

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \exp(0\pi\mathbf{i}) = \cos(0\pi) + \mathbf{i}\sin(0\pi) = 1, \\ \alpha_1 &= \exp(\frac{2}{3}\pi\mathbf{i}) = \cos(\frac{2}{3}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \alpha_2 &= \exp(\frac{4}{3}\pi\mathbf{i}) = \cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Nyní najdeme goniometrický tvar čísla $z_0 = 1 + \mathbf{i}$. Platí $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dále z_0 leží v prvním kvadrantu a tedy argument z_0 je roven $\arg z_0 = \arctan \frac{\Im z_0}{\Re z_0} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Tedy

$$z_0 = |z_0| \exp(\mathbf{i} \arg z_0) = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathbf{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)\big).$$

Tudíž např. $\beta = \sqrt[6]{2}\exp(\frac{1}{12}\pi\mathbf{i})$ je třetí odmocnina ze z_0. Všechny třetí odmocniny ze z_0 jsou tvaru

$$\beta\alpha_0 = \beta,\ \beta\alpha_1 = \sqrt[6]{2}\exp(\frac{9}{12}\pi\mathbf{i}),\ \beta\alpha_2 = \sqrt[6]{2}\exp(\frac{17}{12}\pi\mathbf{i}).$$

(4. b) Najděte (v $\mathbb{C}$) všechny kořeny rovnice $z^n = \bar{z},\ n \in \mathbb{N}$.

Řešení: Rovnici přenásobíme z dostaneme $z^{n+1} = z\bar{z} = |z|$. Pak $|z| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$. Tedy nutně $|z| = 0$ nebo $|z| = 1$. V prvním případě dostáváme jen nulové řešení. V druhém případě máme najít všechna řešení rovnice $z^{n+1} = 1$. Dle postupu uvedeného nahoře je $z^{n+1} = 1 \Leftrightarrow z = \exp(\frac{2k}{n+1}\pi\mathbf{i}),\ k = 0, \cdots, n$. Všechna řešení původní rovnice jsou 0 a $\exp(\frac{2k}{n+1}\pi\mathbf{i})$, kde $k = 0, 1, \cdots, n$.

(5.a) Rozložte polynom $x^4 + 1$ jako součin nejvýše kvadratických polynomů s reálnými koeficienty.

Řešení: Nechť $\alpha_0, \cdots, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ značí (ne nutně různé) kořeny polynomu $x^4 + 1$, tj, $\alpha_i^4 = -1 = \exp(\pi\mathbf{i})$. Pak α_k nutně leží na jednotkové komplexní kružnici a tedy $\alpha_k = \exp(\mathbf{i}\varphi_k)$ pro $\varphi_k \in [0, 2\pi),\ k = 0, 1, 2, 3$. Z Moivreovy věty víme, že musí platit $4\varphi_k = \pi \ mod\ 2\pi$. To vede na $\varphi_k = \frac{\pi + 2\pi k}{4},\ k = 0, 1, 2, 3$. Tedy

$$\alpha_0 = \exp(\frac{\pi}{4}\pi\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},\ \alpha_1 = \exp(\frac{3\pi}{4}\pi\mathbf{i}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},$$
$$\alpha_2 = \exp(\frac{5\pi}{4}\pi\mathbf{i}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},\ \alpha_3 = \exp(\frac{7\pi}{4}\pi\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}.$$

Dále $\bar{\alpha}_0 = \alpha_3$ a $\bar{\alpha}_1 = \alpha_2$. Konečně dostaneme

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= \prod_{k=0}^{3}(x - \alpha_k) = (x - \alpha_0)(x - \bar{\alpha}_0)(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \\
&= (x^2 - (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0)x + 1)(x^2 - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)x + 1) \\
&= (x^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + 1)(x^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + 1) \\
&= (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1).
\end{aligned}$$

(9) Spočtěte

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{dx}}{1+x^4}.$$

(Návod: Integrál počítejte jako

$$\Im \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+\mathbf{i}}{x^4+1} \mathbf{dx}$$

a využijte vzorec

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{x-(a+b\mathbf{i})} = \ln\sqrt{(x-a)^2+b^2} + \mathbf{i} \arctan\frac{x-a}{b} + C,$$

kde $a, b, C \in \mathbb{R}$ a $b \neq 0$.)

Řešení: Nejprve spočteme primitivní funkci k $\frac{1}{x-(a+b\mathbf{i})}$, $b \neq 0$. Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-(a+b\mathbf{i})} &= \frac{1}{x-(a+b\mathbf{i})} \frac{x-a+b\mathbf{i}}{x-a+b\mathbf{i}} \\ &= \frac{x-a+b\mathbf{i}}{(x-a)^2+b^2} = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + \mathbf{i}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{dx}}{x-(a+b\mathbf{i})} &= \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\, \mathbf{dx} + \mathbf{i} \int \frac{b\, \mathbf{dx}}{(x+a)^2+b^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{\mathbf{i}}{b}\int \frac{\mathbf{dx}}{(\frac{x-a}{b})^2+1} \\ &= \ln\sqrt{(x-a)^2+b^2} + \mathbf{i}\arctan\frac{x-a}{b} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nechť

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},\ \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}},\ \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$$

jsou jako v řešení (5.a), takže $x^4+1 = \prod_{k=0}^{3}(x-\alpha_k) = (x^2+\mathbf{i})(x^2-\mathbf{i})$. Všimneme si, že $\alpha_0 = -\alpha_2,\ \alpha_1 = -\alpha_3$ a $\alpha_0^2 = \alpha_2^2 = \mathbf{i},\ \alpha_1^2 = \alpha_3^2 = -\mathbf{i}$. Tudíž

$$\begin{aligned} x^2 - \mathbf{i} &= x^2 - \alpha_0^2 = (x-\alpha_0)(x+\alpha_0) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_3), \\ x^2 + \mathbf{i} &= x^2 - \alpha_1^2 = (x-\alpha_1)(x+\alpha_1) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_4), \\ \frac{x^2+\mathbf{i}}{x^4+1} &= \frac{1}{x^2-\mathbf{i}} = \frac{1}{(x-\alpha_0)(x-\alpha_3)}. \end{aligned}$$

Dále potřebujeme spočíst rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{(x-\alpha_0)(x-\alpha_3)} = \frac{A}{x-\alpha_0} + \frac{B}{x-\alpha_3},\ A, B \in \mathbb{C}.$$

Máme $1 = A(x-\alpha_3) + B(x-\alpha_0)$. Dosadíme za x postupně α_0 a α_3 a dostaneme

$$A = \frac{1}{\alpha_0-\alpha_3} = \frac{1}{2\alpha_0} = \frac{\bar{\alpha}_0}{2},\ B = \frac{1}{\alpha_3-\alpha_0} = -A.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+\mathbf{i}}{x^4+1}\mathbf{dx} =& \frac{\bar{\alpha}_0}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{dx}}{x-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}})} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{dx}}{x+(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}})}\Big)\\
=& \frac{\bar{\alpha}_0}{2}\Big[\ln\sqrt{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \mathbf{i}\arctan\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\\
&- \ln\sqrt{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \mathbf{i}\arctan\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2}}\Big]_{-\infty}^{+\infty}\\
=& \frac{\bar{\alpha}_0}{2}\Big[\ln\sqrt{\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}} + \mathbf{i}\arctan\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \mathbf{i}\arctan\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\Big]_{-\infty}^{+\infty}\\
=& \frac{\bar{\alpha}_0}{2}\big(\ln\sqrt{1}+2\mathbf{i}\frac{\pi}{2}-(\ln\sqrt{1}-2\mathbf{i}\frac{\pi}{2})\big) = \pi\mathbf{i}\bar{\alpha}_0 = \pi\mathbf{i}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{dx}}{1+x^4} = \Im\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+\mathbf{i}}{x^4+1}\mathbf{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Příklady pro koumáky

(9) Spočtěte integrál

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathbf{dx}\ , \quad \alpha\in\mathbb{R},\quad |\alpha|\neq 1.$$

$\big($Návod: Uvažujte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\ln(1-2\alpha\cos(\frac{i}{n})+\alpha^2)\big)$.

Řešení: Nejprve provedeme rozklad polynomu $\alpha^{2n}-1$ na kořenové činitele. Zde chápeme α jako neznámou v polynomu stupně $2n$. Pro jednoduchost označme primitivní $2n$-tou odmocninu z 1 jako

$$q:=\exp\big(\frac{2\pi\mathbf{i}}{2n}\big)=\exp\big(\frac{\pi\mathbf{i}}{n}\big)=\cos(\frac{\pi}{n})+\mathbf{i}\sin(\frac{\pi}{n}).$$

Potom množina $\{q,q^2,\cdots,q^{2n}\}$ jsou všechny $2n$-té odmocniny z 1. Přitom platí $q^{2n}=1,\ q^n=-1$ a konečně $q^{2n-j}=\bar{q}^j,\ j=1,\cdots,n-1$. Dále

$$\begin{aligned}
\alpha^{2n}-1&=\prod_{j=1}^{2n}(\alpha-q^j)=(\alpha-(-1))(\alpha-1)\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha-q^j)\prod_{j=n+1}^{2n-1}(\alpha-q^j)\\
&=(\alpha^2-1)\prod_{j=1}^{n-1}\Big((\alpha-q^j)(\alpha-q^{2n-j})\Big)=(\alpha^2-1)\prod_{j=1}^{n-1}\Big((\alpha-q^j)(\alpha-\bar{q}^j)\Big)\\
&=(\alpha^2-1)\prod_{j=1}^{n-1}\Big(\alpha-\Big(\cos(\frac{j\pi}{n})+\mathbf{i}\sin(\frac{j\pi}{n})\Big)\Big)\Big(\alpha-\Big(\cos(\frac{j\pi}{n})-\mathbf{i}\sin(\frac{j\pi}{n})\Big)\Big)\\
&=(\alpha^2-1)\prod_{j=1}^{n-1}\Big(\alpha^2-2\alpha\cos(\frac{j\pi}{n})+1\Big).
\end{aligned}$$

Dále použijeme definici Riemannova integrálu a můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \ln(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)dx&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\frac{\pi j}{n}))\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\frac{\pi j}{n}))\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\Big(\prod_{j=1}^{n-1}(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\frac{\pi j}{n}))(1+\alpha^2+2\alpha)\Big)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\Big(\frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha+1)^2}{\alpha^2-1}\Big)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\Big(\frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha+1)}{\alpha-1}\Big)\\
&=\pi\lim_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha+1)}{\alpha-1}}\\
&=\begin{cases}\pi\ln(\alpha^2), & |\alpha|>1,\\ 0, & |\alpha|<1.\end{cases}
\end{aligned}$$

(10) Ukažte, že kruhové inverze zobrazují kružnice a přímky v rovině $\mathbb{R}^2$ na kružnice a přímky v rovině.

(Návod: Nechť $k(s,r)$ značí kružnici se středem s a poloměrem $r > 0$. Vzdálenost bodů $x, y \in \mathbb{R}^2$ značíme $|xy|$. Kruhová inverze určená kružnicí $k(s,r)$ je zobrazení $I_{s,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{s\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{s\},\ I_{s,r}(x) = x'$, kde bod x' je jednoznačně určen tím, že x' leží na polopřímce vycházející ze s a procházející x a $|sx||sx'| = r^2$.

Ukažte, že kruhová inverze určená jednotkovou kružnicí se středem v počátku odpovídá zobrazení $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ a převeďte případ obecné kruhové inverze na tento speciální případ. Zde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

Řešení. $\mathbb{R}^2$ budeme chápat jako $\mathbb{C}$ skrze zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto x + \mathbf{i}y$. Pak je jednoduché ověřit, že skutečně $I_{0,1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, I_{0,1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, kde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kružnice $k(s,r)$ má rovnici

$$r^2 = |z-s|^2 = (z-s)\overline{(z-s)} = |z|^2 - 2\Re(zs) + |s|^2, \tag{1}$$

tj. $k(s,r)$ je množina všech $z \in \mathbb{C}$, které vyhovují (1). Obecná rovnice přímky v $\mathbb{C}$ je pak tvaru

$$2\Re(zA) = a, \tag{2}$$

kde $A \in \mathbb{C}$ a $a \in \mathbb{R}$ jsou libovolné.

Nechť P_x značí posunutí o vektor $x \in \mathbb{C}$, tj. $P_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P_x(v) = v + x$, a D_λ značí dilataci s faktorem $\lambda > 0$, tj. $D_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ D_\lambda(x) = \lambda x$. Tato dvě zobrazení zřejmě zobrazují kružnice a přímky na kružnice a přímky. Dále je jednoduché ukázat, že $P_s \circ I_{0,r} \circ P_{-s} = I_{s,r}$ a $D_r \circ I_{0,1} \circ D_{r^{-1}} = I_{0,r}$. Tudíž $I_{s,r} = P_s \circ D_r \circ I_{0,1} \circ D_{r^{-1}} \circ P_{-s}$.

Zbývá tedy ukázat, že $I_{0,1}$ zobrazuje kružnice a přímky na kružnice a přímky. Nejprve uvažujme obraz $k(s,r)$. Jestliže rovnici (1) podělíme $|z|^2 \neq 0$, dostaneme

$$\frac{r^2 - |s|^2}{|z|^2} + 2\Re\left(\frac{s}{\bar{z}}\right) = 1.$$

Jestliže $r = |s|$, pak dostaneme rovnici přímky

$$2\Re\left(\frac{s}{\bar{z}}\right) = 1.$$

Pokud $r \neq |s|$, pak dělíme $r^2 - |s|^2$ a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{|z|^2} + 2\Re\left(\frac{s}{\bar{z}(r^2 - |s|^2)}\right) &= \frac{1}{r^2 - |s|^2}\\ \left|\frac{1}{\bar{z}} + \frac{s}{r^2 - |s|^2}\right|^2 &= \frac{1}{r^2 - |s|^2} + \frac{|s|^2}{(r^2 - |s|^2)^2} = \frac{r^2}{(r^2 - |s|^2)^2}.\end{aligned}$$

Vidíme, že $I_{0,1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ leží na $k(\frac{s}{|s|^2 - r^2}, \frac{r}{|r^2| - |s|^2})$. Takže $I_{0,1}$ zobrazí každou kružnici na kružnici nebo na přímku.

Máme-li přímku s rovnicí (2) a podělíme opět $|z|^2 \neq 0$, pak dostaneme rovnici

$$\frac{a}{|z|^2} - 2\Re\left(\frac{A}{\bar{z}}\right) = 0.$$

Je-li $a = 0$, pak opět dostaneme rovnici přímky $\Re(\frac{A}{\bar{z}}) = 0$. Je-li $a \neq 0$, pak dělíme a a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{|z|^2} - 2\Re\left(\frac{A}{a\bar{z}}\right) &= 0\\ \left|\frac{1}{\bar{z}} - \frac{A}{a}\right|^2 &= \frac{|A|^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Tedy $\frac{1}{\bar{z}}$ leží na $k(\frac{A}{a}, \frac{|A|}{|a|})$.

Ověřili jsme, že kruhová inverze $I_{0,1}$ zobrazuje kružnice a přímky na kružnice a přímky. Na přímky se přitom zobrazí právě ty kružnice a přímky, které procházejí počátkem, tj. středem kruhové inverze.