Řešení dú
6. sada

2.d) Spočtěte integrál zavislý na parametru a určete jeho definiční obor

$$\varphi(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. *Můžeme BÚNO předpokládat $b \geq a$, neboť použít $\varphi(a,b) = -\varphi(b,a)$ na D_φ. Předně integrál konverguje pro $a, b > -1$ nebo $a = b$, neboť pro $f(x,a,b) := \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ platí*

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq -\frac{x^a + x^b}{\ln x} = O(x^a) + O(x^b),\ \varepsilon > 0, x \to 0^+, \\ f(x) &\cong \frac{x^b(1 - x^{a-b})}{x-1} \to b - a,\ x \to 1^-. \end{aligned}$$

Z druhého řadku plyne konvergence integrálu na levém okolí bodu 1. Z druhého řadku pak vidíme, že integrál konverguje na pravém okolí nuly pro $a, b > -1$.

Naopak pokud $a \neq b$; tedy $a < b$, $a \leq -1$, pak integrál nekonverguje, neboť

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x^{a-\varepsilon} - x^a \mathrm{d}x}{\ln x} \ \Bigg|\ b = a - \varepsilon,\ \varepsilon = a - b < 0 \\ &= \int_0^1 \frac{x^a(x^{-\varepsilon} - 1)\mathrm{d}x}{\ln x} = +\infty, \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} \frac{x^a(x^{-\varepsilon} - 1)}{\ln x} &\cong -\frac{x^a}{\ln x},\ x \to 0^+, \\ \frac{x^a(x^{-\varepsilon} - 1)}{\ln x} &\geq 0,\ x \in (0,1) \end{aligned}$$

a

$$\int_0^1 \frac{x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\infty, \quad y = \ln x.$$

Konečně vidíme $\varphi(a,a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Můžeme BÚNO předpokládat $a, b > -1,\ b > a$. *Pak platí*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{[x^y]_a^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\int_a^b x^y \ln x\,\mathrm{d}y}{\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= [\ln(1+y)]_a^b \\
&= \ln\frac{1+b}{1+a}.
\end{aligned}$$

Ve čtvrté rovnosti jsme použili Fubiniho větu. Splnění předpokladů věty plyne jednoduše z toho, že funkce $h(x, y) = x^y$ *je kladná a spojitá na* $(0, 1) \times (a, b)$. *Patří tedy do* $\mathcal{L}^*((0, 1) \times (a, b))$.