Řešení dú
5. sada

2.b) Spočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. *Předně integrál konverguje, neboť pro* $f(x) := \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2} = -\frac{\ln x}{(1-x)(1+x)}$ *platí*

$$f(x) \cong -\ln x,\ x \to 0^+,\ f(x) \cong \frac{1}{2},\ x \to 1^-$$

a funkce $\ln x$ *je integrovatelná na* $(0, +\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ *s primitivní funkcí* $x \ln x - x$ *na* $(0, +\infty)$.

Dále použijeme vzorec pro součet geometrické řady a dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 -\frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} -x^{2k} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^{2k} \ln x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Léviho věty, neboť $-x^{2k} \ln x > 0$ *na* $(0, 1)$, *tudíž částečné součty tvoří rostoucí posloupnost nezáporných funkcí.*

Dále

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2k} \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}x \\ &= (0-0) - \int_0^1 \frac{x^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Celkově tedy máme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4.6} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$