

Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK
Sada příkladů 8

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Plošný integrál 1. druhu.

(1) Parametrizujte torus.

(2) Parametrizujte Möbiův list.

(3) Napište parametricky rovnici zobecněné koule

$$|x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha = a^\alpha,$$

α i $a > 0$.

(4) Najděte plošný obsah plochy $z^2 = 2xy$ uříznuté rovinami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

(5) Najděte plošný obsah plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, omezené vnitřkem válce $x^2 + y^2 = 2x$.

(6) Najděte plošný obsah plochy $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = h\varphi$, $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < 2\pi$, $h > 0$.

(7) ♠ Najděte plošný obsah anuloidu $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$. (1 bod)

(8) Najděte plošný obsah plochy $x^2 + y^2 = 1$ omezené $y^2 + z^2 \leq 1$.

(9) Najděte plošný obsah plochy $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1$, $z \geq 0$.

(10) Spočtěte $\int_S \frac{dS}{h}$, kde S je povrch elipsoidu a h je vzdálenost od středu elipsoidu k rovině "tečné k dS ".

(11) Spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS$, kde S část hyperbolického paraboloidu $z = xy$, odříznutá válcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$ ($|z| \leq R$).

(12) Najděte momenty setrvačnosti homogenní trojúhelníkové desky desky $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, vůči jednotlivým souřadnicovým osám.

(13) Spočtěte gravitační sílu, kterou se přitahují dvě homogenní sféry o poloměrech R a r , ležící ve vzdálenosti d . Plošná hustota rozložení hmoty je ρ .

(14) Najděte těžiště homogenního kužele $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ useknutého válcem $x^2 + y^2 = ax$.

(15) Najděte těžiště homogenní části koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z \geq 0$.

(16) Najděte těžiště homogenního helikoidu $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$, $0 < u < a$, $0 < v < \pi$.

(17) Najděte gravitační potenciál homogenní kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ v bodě $P = (x_0, y_0, z_0)$, tj. spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dS$.

(18) Najděte sílu, kterou působí kapalina s hustotou γ na svislou stěnu nádoby tvaru parabolického úseku $\frac{h}{a^2}(y^2 - a^2) \leq z \leq 0$, $x = 0$.

Řešení: **4.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, **5.** $\sqrt{2}\pi$, **6.** $\pi \left(a\sqrt{h^2 + a^2} + \ln \left(\frac{a}{h} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \right) \right)$, **8.** 8, **9.** $\frac{\pi}{6} (3\sqrt{10} + \operatorname{argsinh} 3)$, **10.** $\frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Příklad označený ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.