Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK

Sada příkladů 6

Henri Lebesgue a jeho integrál

Integrály závislé na parametru.

(1) Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}\,\mathrm{d}x$, $a<2$

b) $\int_0^2 x^2\cos ax\,\mathrm{d}x$, $-\infty<a<\infty$

c) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x$, $1<a<\infty$

(2) Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) ♠ $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ (1 bod)

e) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax\operatorname{arctg} bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$

f) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cosh bx\,\mathrm{d}x$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

i) $\int_0^\pi \ln(a\pm b\cos x)\,\mathrm{d}x$

j) $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

k) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

l) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sinh x}{x}\,\mathrm{d}x$

m) $\int_0^1 x^\alpha \ln^n x\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}_0$

n) $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2+b^2\mathrm{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x$

o) $\int_{x>0,y>0}\mathrm{e}^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})}x^{-1/3}y^{-2/3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(3) Doplněním vhodného parametru spočtěte:

a) $\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\mathrm{tg}x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: 2. **a)** $\frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} a)\ln(1+|a|)$, $a\in\mathbb{R}$, **b)** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$, $a,b>0$ nebo $a=b$, **c)** $\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, $a,b\geq 0$, **e)** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$, $a,b\geq 0$, **f)** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$, **g)** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, **h)** $\pi(\sqrt{1+a}-1)$, $a\geq -1$, **i)** $\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $0<b\leq a$, **j)** $\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, **k)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+a^2}{a^2}$, $a>0$, **l)** $\frac{1}{4}\ln\frac{(a-1)^2+1}{(a+1)^2+1}$, $a>1$, **m)** $\frac{(-1)^n n!}{(1+\alpha)^{n+1}}$, $\alpha>-1$, **n)** $\pi\ln(|a|+|b|)$, $a^2+b^2>0$, **o)** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3a}$, $a\geq 0$.

Řešení: 3. **a)** $\frac{\pi}{2}\ln 2$, **b)** $\frac{\pi}{4}$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.