

Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK
Sada příkladů 4

HENRI LEBESGUE A JEHO INTEGRÁL

Fubiniho věta, věta o substituci.

- (1) Převedte $\int_{\Omega} f(x+y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$.
- (2) Převedte $\int_{\Omega} f(x \cdot y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a $x, y > 0$.
- (3) Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x) dx) dy$ pomocí jednoho integrálu.
- (4) Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
 - (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
 - (b) $(x^3 + y^3)^2 = xy$
 - (c) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$
- (5) Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
 - (a) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \geq R\sqrt{2} > 0$
 - (b) $z = xy$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
 - (c) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$
 - (d) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$
 - (e) ♠ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $a, b, c > 0$
 - (f) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a, b, c > 0$
 - (g) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
- (6) Spočítejte následující integrály:
 - (a) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 - (b) $\int_{\Omega} x^{-p} y^{-q} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); xy \geq 1, x \geq 1\}$
 - (c) $\int_{\Omega} (x+y)^{-p} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

Řešení: 1. $\int_{-1}^1 f(x) dx$, 2. $\ln 2 \int_1^2 f(x) dx$, 3. $\int_0^1 x f(x) dx$, 4. **a)** $2a^2$, **b)** $\frac{\pi}{3}$, **c)** $\frac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2(1+\alpha)(1+\beta)}$,
5. **b)** $\frac{17}{12} - 2 \ln 2$, **c)** $\frac{45\pi}{32}$, **d)** $\pi(1 - e^{-R^2})$, **f)** $\frac{abc}{3}$, **g)** $\frac{1}{2}$,
6. **a)** π , **b)** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p > q > 1$, **c)** $\frac{1}{p-1}$, $p > 1$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat do 22.11. jako domácí úkol.

- (7) Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x, y, a > 0$.
- (8) Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\rho = 1$ ohraničené $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0, y = 0, 0 \leq x \leq a$.
- (9) Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c, a, b, c > 0$.
- (10) Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0}gz\right),$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h , poloměr R . Určete hmotnost vzduchu ve válci.

Řešení: (7) $\left(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}\right)$, (8) $\left(\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{4}{3}\right)a^4, \left(\frac{5\pi}{8}\right)a^4\right)$, (9) $(0, 0, \frac{3}{4}c)$.