

**Matematika pro fyziky I**  
**ZS 2022/23, MFF UK**  
Sada příkladů 5

HENRI LEBESGUE A JEHO INTEGRÁL

**Lebesgueova a Léviho věta.**

(1) Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} x^2 dx$

Řešení: 1. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 0.

(2) Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$

b) ♠  $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$

(1 bod)

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \right)$

Řešení: 1. **a)**  $\frac{\pi^2}{6}$ , **c)**  $\frac{\pi^4}{15}$ .

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.