

**Matematika pro fyziky I**  
**ZS 2022/23, MFF UK**  
 Sada příkladů 3

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

**Řady funkcí.**

(1) Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$                                       | b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$                           |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$         | d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \tan \frac{x}{2^n}$                         |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos x$                                | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$ |   |

Řešení: **1.a)** KA na  $(e^{-1}, e)$ , **b)** KA na  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 1\}$ , **c)** KA na  $(0, +\infty)$ , **d)** KA na  $(-2, 2)$ ,  
**e)** KA na  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup (0, +\infty)$ , **f)** pro  $p > 1$  KA na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ , pro  $p \in (0, 1]$  K na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ ,  
**g)** KA pro  $|x| < 1$  nebo  $1 \leq |x| < y$ , dále K pro  $x = -1$ .

Mimo uvedené množiny řady nekonvergují.

$\mathbb{Z}^- := \{k \in \mathbb{Z} : z < 0\}$ , KA...konverguje absolutně, K...konverguje

(2) Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech:

- |   |          |
|---|----------|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ na $[0, 1]$ a $[0, 1 - \varepsilon]$ , $\varepsilon > 0$  |          |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}$ na $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , $0 < \varepsilon < \pi$ a $[0, 2\pi]$ |          |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ na $\mathbb{R}$   |          |
| d) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ na $[-K, K]$ , $K > 0$ a $\mathbb{R}$                                 |          |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt{x^2}$ na $[0, K]$ , $K > 0$ a $[0, \infty)$   |          |
| f) $\spadesuit \sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{nx}$ , $\alpha \in \mathbb{N}_0$ na $(-\infty, -1]$ , $[-1, 0]$ a $[0, 1]$                 | (2 body) |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{x^2+n^2}) \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$  |          |
| h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ na $\mathbb{R}$  |          |
| i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x \ln \frac{x}{n}$ na $(0, K]$ , $K > 0$ a $(0, \infty)$   |          |
| j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}} e^{-nx}$ na $[0, \infty)$   |          |

Řešení: **2.a)**  $\sum \Rightarrow$  na  $[0, 1 - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum \not\Rightarrow$  na  $[0, 1]$ ,  
**b)**  $\sum \Rightarrow$  na  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$ ,  $\sum \not\Rightarrow$  na  $[0, 2\pi]$ , **c)**  $\sum \Rightarrow$  na  $\mathbb{R}$ , **d)**  $\sum \not\Rightarrow$  na  $\mathbb{R}$ ,  $\sum \Rightarrow$  na  $[0, K]$   
**e)**  $\sum \not\Rightarrow$  na  $\mathbb{R}$ ,  $\sum \Rightarrow$  na  $[0, K]$ ,  
**g)**  $\sum \Rightarrow$  na  $\mathbb{R}$ ,  
**h)**  $\sum \Rightarrow$  na  $\mathbb{R}$ ,  
**i)**  $\sum \not\Rightarrow$  na  $(0, +\infty)$ ,  $\sum \Rightarrow$  na  $(0, K]$ ,  
**j)**  $\sum \Rightarrow$  na  $[0, +\infty)$ .

Příklady označené  $\spadesuit$  můžete odevzdávat jako domácí úkol.