Řešení vybraných příkladů a DÚ
1. sada

5.d)

$$\Phi(y) = \int_0^a (1 - e^{-(y')^2})\mathrm{d}x,\ y(0) = 0,\ y(a) = b,\ a > 0.$$

Řešení. *Máme* $f(x, y, z) = 1 - e^{-z^2} \in \mathcal{C}^\infty([0, a] \times \mathbb{R}^2)$ *a*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{-z^2}.$$

Euler-Lagrangeova rovnice je tudíž

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2y'e^{-(y')^2}\right) \\
&= -2\left(y''e^{-(y')^2} - 2y''(y')^2e^{-(y')^2}\right) \\
&= -2y''e^{-(y')^2}\left(1 - 2(y')^2\right).
\end{aligned}$$

Tudíž $y'' = 0$ *nebo* $1 = 2(y')^2$. *Řešením obou těchto rovnic jsou afinní funkce tvaru* $y = cx + d$ *pro* a, b. *Jelikož tyto funkce nelze lepit netriviálním způsobem na intervalu* $(0, a)$, *pak každé* $\mathcal{C}^1$ *řešení Euler-Lagrangeovy rovnice je nutně afinní funkce. Z okrajových podmínek dostaneme*

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = d, \\
b &= y(a) = ac \Rightarrow c = \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Máme tedy jediný kritický bod funkcionálu $y_o(x) = \frac{b}{a}x,\ x \in [0, a]$. *Zbývá rozhodnout, zda se jedná o lokální extrém.*

(i) Nejprve zkusíme použít Jacobiho rovnici. Dostaneme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,\ P := \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2e^{-z^2}(1 - 2z^2).$$

Tudíž Jacobiho rovnice je

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x, y_o, y_o')h'\right) &= 0 \\
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2e^{-(\frac{b}{a})^2}\left(1 - 2\frac{b^2}{a^2}\right)h'\right) &= 0 \\
-2e^{-(\frac{b}{a})^2}\left(1 - 2\frac{b^2}{a^2}\right)h'' &= 0
\end{aligned}$$

Jestliže $a^2 \neq 2b^2$, *pak jediné řešení Jacobiho rovnice jsou afinní funkce a odsud jednoduše získáme, že neexistuje konjugovaný bod na* $(0, a]$. *Konečně, jestliže* $a^2 > 2b^2$, *pak jsou splněny předpoklady Věty*

13.3.9.(i) ze skript a tudíž y_o je minimizér. Je-li naopak $a^2 < 2b^2$, pak ze stejného důvodu je y_o maximizér. Pro $a^2 = 2b^2$ nelze na základě vět ze skript rozhodnout.

(ii) Nyní zkusíme test přes konvexitu funkcionálu. Matice druhých parciálních derivací je tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-z^2}(1-2z^2) \end{pmatrix}.$$

Tato matice je pozitivně semi-definitintí na množině, kde $P > 0$ a negativně semi-definitní tam, kde $P < 0$. Tudíž Φ je konvexní na otevřené množině

$$U_+ := \{y \in \mathcal{C}^1([0,a]) : \; y(0) = 0, \; y(a) = b, \; 1 - 2(y')^2 > 0\}$$

a naopak konkávní na otevřené množině

$$U_- := \{y \in \mathcal{C}^1([0,a]) : \; y(0) = 0, \; y(a) = b, \; 1 - 2(y')^2 < 0\}.$$

Jelikož $y_0 \in U_+$ pro $a^2 > 2b^2$, pak v tomto případě je Φ konvexní na otevřeném okolí y_0 obsaženém v U_+ a tudíž y_0 minimizér Φ. (Důkaz věty 13.2.18 funguje i v tomto případě.) Pokud platí $a^2 < 2b^2$, pak je naopak y_0 maximizér.

6.b)

$$\Phi(y) = \int_a^b (y')^2 \mathrm{d}x, \; a = 0, \; b = 1, \; y(0) = 1, \; y(1) = 6, \; g(y) = \int_0^1 y \, \mathrm{d}x = 3.$$

Řešení. *Hledáme lokální extrémy funkcionálu $\Psi := \Phi - \lambda g$ na množině*

$$M := \{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) : \; y(0) = 1, \; y(1) = 6, \; g(y) = 3\},$$

kde konstanty $\lambda \in \mathbb{R}$ dostaneme z Euler-Lagrangeovy rovnice tak, abychom získali nějaké kritické body. Máme $f = z^2 - \lambda y$, tudíž

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \; \frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda.$$

Euler-Lagrangeova rovnice vyjde

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda &= 0 \\ -2y'' - \lambda &= 0 \\ y'' &= -\frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Řešením jsou tedy kvadratické polynomy $y(x) = cx^2 + dx + e$. Pak z okrajových podmínek a vazby máme

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = e \\ 6 &= y(1) = c + d + e \\ 3 &= \int_0^1 y \, \mathrm{d}x = \frac{c}{3} + \frac{d}{2} + e. \end{aligned}$$

Dostaneme soustavu pro dvě neznámé:

$$5 = c + d$$
$$2 = \frac{c}{3} + \frac{d}{2}.$$

Pak $c = 5 - d$ *a* $12 = 2c + 3d = 3d + 2(5 - d) = 10 + d$. *Tedy* $d = 2$ *a* $c = 3$. *Máme jeden kritický bod* $y_o = 3x^2 + 2x + 1$, *a to pro* $\lambda = -2.2.3 = -12$.

Nyní funkcionál $\Psi = \Phi + 12g$ *je konvexní, neboť hessián* f *dle proměnných* y, z *vyjde*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je všude pozitivně semi-definitní. Tudíž každý kritický bod je i globální minimum. Tudíž y_o *je dokonce globální minimum* Φ *na* M, *neboť* $\Phi = \Psi - 36$ *na* M.

Tento výsledek ještě porovnáme s Jacobiho rovnicí. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \ P = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2.$$

Tedy Jacobiho rovnice je tvaru:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2h'\right) = 0.$$

Stejně jako v předchozím příkladě se ukáže, že na $(0, 1]$ *není žádný konjugovaný bod. Dále* $P(x, y_o, y_o') = 2 > 0$ *na* $[0, 1]$, *tedy* y_o *je minimizér.*