Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK
Sada příkladů 1

Klasický variační počet

(1) Gâteauxův a Fréchetův diferenciál.

a) Spočtěte Gâteauxovy diferenciály $\delta\Phi(y;h)$, $\delta^2\Phi(y;h,k)$ a $\delta^3\Phi(y;h,k,l)$ pro

$$\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathcal{C}^1[a,b].$$

b) Spočtěte první Gâteauxův a Fréchetův diferenciál funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathcal{C}^1[0,1].$$

c) Spočtěte první a druhý Gâteaux diferenciál funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^3 + x^2\sin(\pi y) + y''y''' + y\mathrm{e}^{-(y'')^2}\right]\mathrm{d}x, \quad y \in \mathcal{C}^3[0,1].$$

d) Spočtěte první Gâteaux diferenciál funkcionálu

$$\Phi(y_1,y_2) = \int_0^1 \left[xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6\right]\mathrm{d}x, \quad y \in \mathcal{C}^1[0,1] \times \mathcal{C}^1[0,1].$$

Řešení: 1. **a**) $\delta\Phi(y;h) = \int_0^1 (2yh + 2y'h')dx$, $\delta^2\Phi(y;h,k) = 2\int_0^1 (kh + k'h')dx$ a $\delta^3\Phi(y;h,k,l) = 0$,
b) $\delta\Phi(y;h) = 2\int_0^1 x^2(2y^3h - y'h')dx = \Phi'(y)h$,
c) $\delta\Phi(y;h) = \int_0^1 \big(3(y')^2h' + \pi x^2 h\cos(\pi y) + y''h''' + h''y''' + (h - 2yy''h'')e^{-(y'')^2}\big)dx$,
$\delta^2\Phi(y;h,k) = \int_0^1 \big(6y'k'h' - \pi^2x^2kh\sin(\pi y) + k''h''' + h''k''' + 2(2y(y'')^2h''k'' - y''(hk'' + kh'') - yk''h'')e^{-(y'')^2}\big)dx$,
d) $\delta\Phi\big((y_1,y_2);(h_1,h_2)\big) = 2\int_0^1 (xh_1y_1 + (y_1')^2y_2'h_2' + y_1'h_1'(y_2')^2 + 3(y_2')^5h_2')dx$.

(2) Ukažte, že zadaný funkcionál $\Phi : M \to \mathbb{R}$ nemá na $M = \{y \in \mathcal{C}^1[-1,1]; -y(-1) = y(1) = 1\}$ minimum.

a) $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2\,\mathrm{d}x$. (Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \operatorname{arctg}(x/a)/\operatorname{arctg}(1/a)$.)

b) $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2\,\mathrm{d}x$. (Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.)

(3) Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - y^2\right]\mathrm{d}x \quad \text{na} \quad M = \{\, y \in \mathcal{C}^1[0,2\pi];\ y(0) = y(2\pi) = 1\}.$$

Řešení: $y = a\sin x + \cos x,\ a \in \mathbb{R}$.

(4) Nechť

$$\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

a nechť

$$M = \{u \in \mathcal{C}^1[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}.$$

(a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
(b) Ukažte, že $\delta^2\Phi(y_0;h,h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
(c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu pro n dost velké, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $\mathcal{C}^1[0,1]$) existují body y_1, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

(5) Nalezněte lokální extrémy následujících funkcionálů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

a) $\Phi(y) = \int_1^2 \left[x(y')^4 - 2y(y')^3\right] \mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

b) $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} \mathrm{d}x$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$

c) $\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + x^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$

d) ♠ $\Phi(y) = \int_0^a \left[1 - \mathrm{e}^{-(y')^2}\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$ (2 body)

e) $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 \,\mathrm{d}x$, $y(0) = p > 0$, $y(1) = q > 0$.

Řešení: **a**) lok. min. $y(x) = x - 1$, **b**) lok. min. $y(x) = x^2$, **c**) lok. min. $y(x) = 2x - 1$, **e**) lok. min. $y(x) = \left(p^{\frac{3}{2}}(1 - x) + q^{\frac{3}{2}}x\right)^{\frac{2}{3}}$.

(6) V následujících úlohách hledejte minimum funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_a^b (y')^2 \;\mathrm{d}x$$

na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = const.$

a) $a = 0,\; b = \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $g(y) = \int_0^\pi y^2 \,\mathrm{d}x = 1$

b) $a = 0,\; b = 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $g(y) = \int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 3$

c) $a = 0,\; b = 1$, $y(0) = y(1) = 0$, $g(y) = \int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}x = 2$

d) $a = 0,\; b = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(y) = \int_0^1 \left[y - (y')^2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Řešení: **a**) $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, **b**) $y(x) = 3x^2 + 2x + 1$, **c**) $y(x) = 2\sin(\pi x)$, **d**) $y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat do 25.10. jako domácí úkol.

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice.

(1) Nechť Lagrangián L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extremály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0, \quad (E = \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L).$$

(2) Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots N\}$ Lagrangián nezávisí na x_i. Potom podél libovolné extremály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

(3) Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, ..., q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L\,\mathrm{d}t \qquad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

(4) Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extremály akce S dané Lagrangiánem $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{ij} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\Big\} = 0.$$

(5) Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

a) $J(y_1, y_2) = \int_0^\pi (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2)\,\mathrm{d}t$

b) $J(y) = \int_a^b \sqrt{t^2 + y^2}\sqrt{1 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t$

c) $J(y_1, y_2) = \int_a^b (t^2 + y_1(\dot{y}_1)^2 + y_2(\dot{y}_2)^2)\,\mathrm{d}t.$