3. zápočtový test

Najděte lokální extrémy

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Řešení: Předně $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z): \ xyz = 0\}$. Na D_f je f nekonečně diferencovatelná. Máme

$$\nabla f = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{2y}{4x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right).$$

V bodě lokálního extrému tedy musí platit:

$$\begin{aligned} 4x^2 &= y^2, \\ y^3 &= 2z^2x, \\ z^3 &= y. \end{aligned}$$

Z 1. dosteneme $y = \pm 2x$. Dosazením do 2. rovnice máme $y^3 = \pm yz^2 \Leftrightarrow y^2 = \pm z^2$, neboť $y \neq 0$ na D_f. Vidíme ale, že $y^2 = -z^2$ nemá řešení $(y \neq 0, \ z \neq 0)$. Tudíž nutně $y^2 = z^2$ a $y = 2x$. Z třetí rovnice vidíme, že znaménka z a y se rovnají, tudíž nutně $z = y$. Pak ale máme $z^3 = y = z$ a podezřelé body jsou jen dva, a to

$$A_\pm := \pm\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

Hessova matice má v obecném bodě tvar:

$$\begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}.$$

V bodě A_+ pak dostaneme matici:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

kde $\sim_s$ značí symetrickou úpravu. Vidíme, že se jedná o pozitivně definitní kvadratickou formu. Tedy A_+ je lokálni minimum.

V bodě A_- pak dostaneme matici s opačným znaménkem. Tedy A_- je lokálni maximum.