3. zápočtový test

Najděte lokální extrémy
$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Řešení: Vyjde
$$\nabla f = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2 + 2z).$$
V bodě lokálního extrému tedy musí platit:
$$\begin{aligned} x^2 &= -4y, \\ y &= -6x, \\ z &= -1. \end{aligned}$$
Z 1. a 2. rovnice máme $x^2 = -4y = 24x$, tedy $x(x-24) = 0$. Máme tedy podezřelé body:
$$A = (0,0,-1),\ B = (24,-144,-1).$$
Hessova matice má v obecném bodě tvar:
$$\begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
V bodě A pak máme matici:
$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
kde $\sim_s$ značí symetrickou úpravu. Vidíme, že se jedná o indefinitní kvadratickou formu. Tedy A není lokálni extrém.

V bodě B pak máme matici:
$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Vidíme, že se jedná o pozitivně definitní kvadratickou formu. Tedy A je lokálni minimum.