2. zápočtový test

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{2n}.$$

Pomocí derivace a integrace této mocninné řady člen po členu vyjáděte součet řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}.$$

Řešení 1. *Platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1,$$

poloměr konvergence je tedy roven 1. Na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici, řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{2n}$$

konverguje pro $w = e^{ix} \neq 1$, stačí použít Dirichletovo kritérium s monotónní poslopností $\frac{1}{2n} \searrow 0$ a řadou $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{inx}$, která má omezenou posloupnost částečných součtů pro $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pro $x = 0$ víme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$. Tudíž řada konverguje pro každé $|z| = 1$ takové, že $z \neq \pm 1$.

Uvnitř kruhu konvergence můžeme tedy řadu derivovat a integrovat člen po členu. Dále budume uvažovat řadu na intervalu $(-1, 1)$ a psát x místo z. Máme

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}\Big)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + \cdots, \\
&= x(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \frac{x}{1-x^2},\ x \in (-1, 1). \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} &= \int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + c.
\end{aligned}$$

Dosazením za $x = 0$ získáme $c = 0$. Tudíž máme

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Dosazením za $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *získáme*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n 2n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\ln(2) = -\ln(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}.$$