2. zápočtový test

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1} \frac{z^n}{n^2}.$$

Pomocí derivace a integrace této mocninné řady člen po členu vyjáděte součet řady

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

jako určitý (Newtonův) integrál.

Řešení 1. *Platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1,$$

poloměr konvergence je tedy roven 1. Na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici, řada konveruje, a to dokonce absolutně (stačí porovnat s konvergentní řadou $\sum 1/n^2$.

Uvnitř kruhu konvergence můžeme tedy řadu derivovat a integrovat člen po členu. Dále budume uvažovat řadu na intervalu $(-1,1)$ a psát x místo z. Máme

$$\begin{aligned}
&(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\\
&(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1,1),\\
&\int \frac{\mathbf{dx}}{1-x} = -\ln|1-x| + c = -\ln(1-x) + c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Dosazením za $x = 0$ získáme $c = 0$. Tudíž máme

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

a dále integrací

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int \frac{\ln(1-x)\,\mathbf{dx}}{x}.$$

Tento integrál již spočítat neumíme, nicméně z Abelovy věty víme, že

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} - \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\\ &= [(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2})']_0^1\\ &= -(N)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\,\mathbf{dx}}{x}.\end{aligned}$$

Konečně si všimneme, že tento (Newtonův) integrál konverguje (což nicméně plyne z předchozího výpočtu), neboť funkce

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

je spojitá na $(0,1)$ *s limitou* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ *(je to základní limita), tím máme konvergenci integrálu na* $(0,\varepsilon),\ 0<\varepsilon<1$*. Dále* $f(x) \sim -\ln(1-x)$ *pro* $x \to 1^-$*. Jelikož* $f(x)$ *i* $-\ln(1-x)$ *jsou kladné funkce na* $(0,1)$ *a*

$$-\int_{\varepsilon}^{1}\ln(1-x)\mathbf{dx} = \int_0^{1-\varepsilon}\ln y\,\mathbf{dy} = [y\ln y - y]_0^{1-\varepsilon} \in \mathbb{R}, \quad \Big|\ 1-x=y,$$

pak z limitního srovnávacího kritéria pro řady máme, že $\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,\mathbf{dx}$ *konverguje vlastní. Tím pádem existuje vlastní i integrál* f *na* $(0,1)$*.*