1. zápočtový test

Vyřešte

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2 - y^2(x)}}{y}.$$

(1) Pro $f(x) = 1,\ g(y) = \frac{\sqrt{2-y^2(x)}}{y}$ platí $D_f = \mathbb{R},\ D_g = [-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$.

(2) $M = \{y :\ g(y) = 0\} = \{\pm\sqrt{2}\}$. Stacionární řešení jsou $y(x) = \pm\sqrt{2}$.

(3) $I = D_f = \mathbb{R},\ D_g \setminus M = J_1 \cup J_2$, kde $J_1 = (-\sqrt{2}, 0),\ J_2 = (0, \sqrt{2})$.

(4) Zvolme $I = \mathbb{R}$ a $J = J_1$. Pak na J_1 máme

$$G(y) = \int \frac{\mathbf{dy}}{g(y)} = \int \frac{y\ \mathbf{dy}}{\sqrt{2 - y^2(x)}} = -\sqrt{2 - y^2(x)}.$$

Na I pak platí

$$F(x) + c = \int f(x)\, \mathbf{dx} = \int \mathbf{dx} = x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(5) $G : J \to (-\sqrt{2}, 0)$ je klesající s inverzní funkcí $G^{-1} : J \to J,\ G^{-1}(u) = -\sqrt{2 - u^2}$.

(6) Pak

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\sqrt{2 - (x + c)^2}$$

řeší diferenciální rovnici na

$$D_c := \{x \in I :\ F(x) + c \in D_{G^{-1}} = G(J) = J\},$$

$$F(x) + c \in J \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x + c < 0 \Leftrightarrow\ x \in (-\sqrt{2} - c, -c).$$

Vidíme, že $D_c \neq \emptyset$ pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení ležící v dolní polorovině jsou tvaru

$$y(x) = -\sqrt{2 - (x + c)^2},\ x \in (-\sqrt{2} - c, -c),\ c \in \mathbb{R}.$$

(6)' V horní polorovině pak vyjdou řešení tvaru

$$y(x) = \sqrt{2 - (x + c)^2},\ x \in (-c, -c + \sqrt{2}),\ c \in \mathbb{R}.$$

(7) Tato řešení můžeme libovolně lepit se stacionárními řešeními a dostaneme tak celkově řešení:

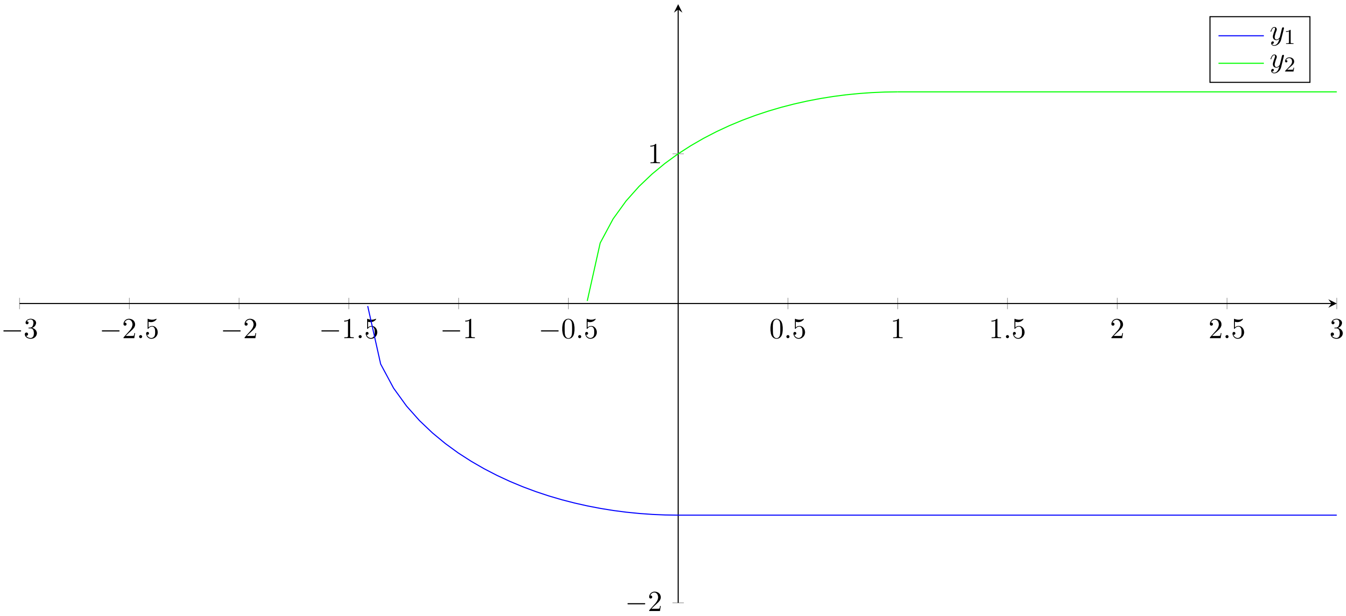
$$y(x) = \pm\sqrt{2},$$

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{2 - (x + c)^2}, & x \in (-\sqrt{2} - c, -c),\ c \in \mathbb{R}, \\ -\sqrt{2}, & -c \leq x, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - (x + c)^2}, & x \in (-c, -c + \sqrt{2}),\ c \in \mathbb{R}, \\ \sqrt{2}, & -c + \sqrt{2} \leq x. \end{cases}$$

(8) Závěr: Větvící body rovnice jsou právě ty body, které leží na přímkách $y = \pm\sqrt{2}$.

Ukázky vybraných maximálních řešení



$$y_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x^2}, & x \in (-\sqrt{2}, 0) \\ -\sqrt{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2-(x-1)^2}, & x \in (-\sqrt{2}+1, 0) \\ \sqrt{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$