1. zápočtový test

Vyřešte

$$y'(x) = \sqrt[3]{|y(x)|}.$$

(1) Pro $f(x) = 1,\ g(y) = \sqrt[3]{|y(x)|}$ platí $D_f = \mathbb{R} = D_g$.
(2) $M = \{y:\ g(y) = 0\} = \{0\}$. Stacionární řešení jsou $y(x) = 0$.
(3) $I = D_f = \mathbb{R},\ D_g \setminus M = J_1 \cup J_2$, kde $J_1 = (-\infty, 0),\ J_2 = (0, +\infty)$.
(4) Zvolme $I = \mathbb{R}$ a $J = J_1$. Pak na J_1 máme

$$G(y) = \int \frac{\mathbf{dy}}{g(y)} = \int \frac{\mathbf{dy}}{\sqrt[3]{|y(x)|}} = \int \frac{\mathbf{dy}}{\sqrt[3]{-y(x)}} = -\frac{3}{2}(-y(x))^{\frac{2}{3}}.$$

Na I pak platí

$$F(x) + c = \int f(x)\mathbf{dx} = \int \mathbf{dx} = x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(5) $G : J \to (-\infty, 0)$ je klesající s inverzní funkcí $G^{-1} : J \to J,\ G^{-1}(u) = -(-\frac{2}{3}u)^{\frac{3}{2}}$.
(6) Pak

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\big(-\frac{2}{3}(x + c)\big)^{\frac{3}{2}}$$

řeší diferenciální rovnici na

$$D_c := \{x \in I:\ F(x) + c \in D_{G^{-1}} = G(J) = J\},$$
$$F(x) + c \in J \Leftrightarrow\ x + c < 0 \Leftrightarrow\ x < -c.$$

Vidíme, že $D_c = \emptyset$ pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení ležící v dolní polorovině jsou tvaru

$$y(x) = -\big(-\frac{2}{3}(x + c)\big)^{\frac{3}{2}},\ x < -c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(6)' V horní polorovině pak vyjdou řešení tvaru

$$y(x) = \big(\frac{2}{3}(x + c)\big)^{\frac{3}{2}},\ x > -c,\ c \in \mathbb{R},$$

(7) Tato řešení můžeme libovolně lepit se stacionárním řešením a dostaneme tak celkově řešení:

$$y(x) = 0,$$

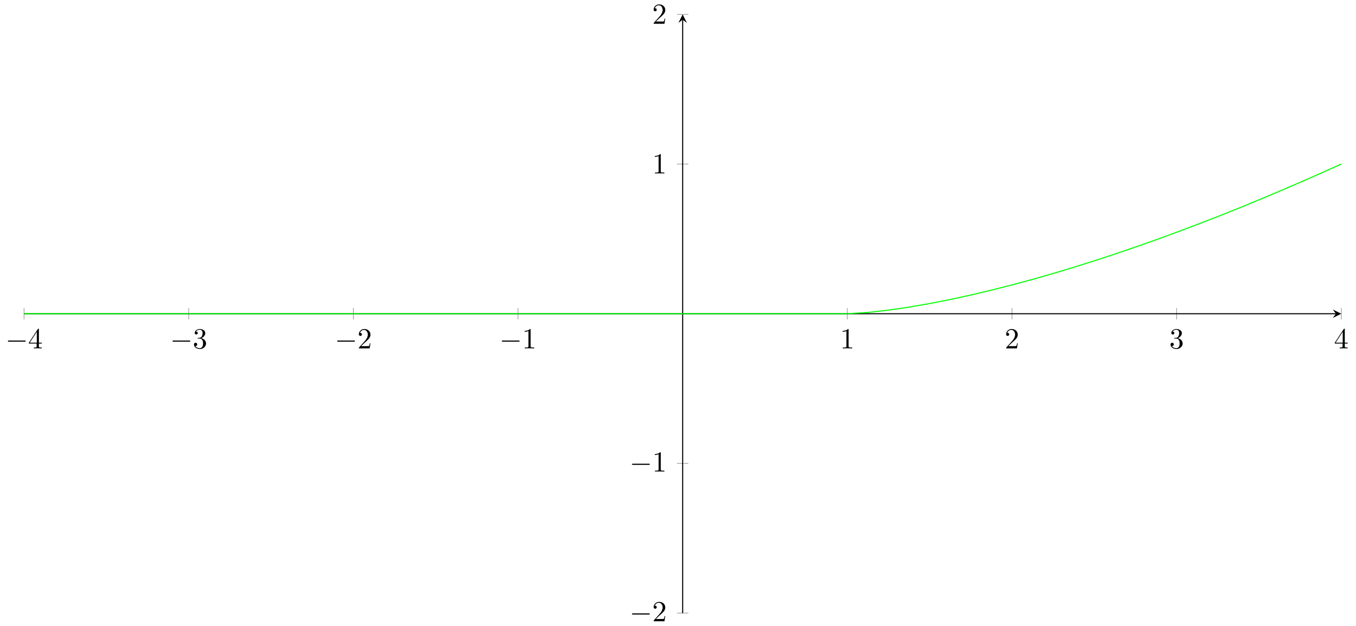
$$y(x) = \begin{cases} -\big(-\frac{2}{3}(x + c)\big)^{\frac{3}{2}}, & x < -c,\ c \in \mathbb{R}, \\ 0, & -c \le x, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \le -c, \\ \big(\frac{2}{3}(x + c)\big)^{\frac{3}{2}}, & -c < x,\ c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -\big(-\frac{2}{3}(x + c_1)\big)^{\frac{3}{2}}, & x < -c_1, \\ 0, & -c_1 \le x \le -c_2, \\ \big(\frac{2}{3}(x + c_2)\big)^{\frac{3}{2}}, & -c_2 < x,\ c_1 \ge c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(8) Závěr: Větvící body rovnice jsou právě ty body, které leží na přímce $y = 0$.

Ukázka vybraného maximálního řešení



$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1] \\ \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{\frac{3}{2}}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$