Řešení dú
12 . sada

8. Najděte lokální extrémy

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y),\ \ x, y \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x - \sin(x-y),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin y + \sin(x-y).\end{aligned}$$

V bodě lokálního extrému tedy platí:

$$\cos x = \sin(x-y) = \sin y.$$

Jelikož $\cos x = \sin y$ pro $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ právě tehdy, když $y = \frac{\pi}{2} - x$, pak máme

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin\Big(2x - \frac{\pi}{2}\Big)\\ &= \sin(2x)\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\cos(2x)\\ &= -\cos(2x)\\ &= -\cos^2(x) + \sin^2(x)\\ &= 1 - 2\cos^2 x.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,\ \ z = \cos x\\ 2z^2 + z - 1 = 0,\\ z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases}\frac{1}{2},\\ -1.\end{cases}\end{aligned}$$

Jelikož $\cos x \in (0,1)$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pak nutně $\cos x = \frac{1}{2}$. Dostali jsme tedy jen jeden podezřelý bod

$$\Big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\Big)$$

Dále Hessova matice f má v obecném bodě tvar:

$$\begin{pmatrix}-\sin x - \cos(x-y) & \cos(x-y)\\ \cos(x-y) & -\cos y - \cos(x-y)\end{pmatrix}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{\pi}{6}$ dostaneme matici:

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

která je negativně definitní (např. ze Sylvestrova kritéria). Bod $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ je tedy lokální maximum.