Řešení vybraných úloh
9. sada

Úmluva: Otevřenou kouli se středem v bodě x a poloměrem ϵ budeme značit $U_\epsilon(x)$.

(3.a) V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou najděte uzávěr grafu funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Řešení: Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x,y) = \begin{cases} y - \sin\frac{1}{x} & , \ x \neq 0, \\ y & , \ x = 0. \end{cases}$$

Platí, že graf funkce f je množina $G = \{(x,y) : \ y = f(x)\} = \{(x,y) : \ F(x,y) = 0\}$. Víme, že funkce f je spojitá všude kromě nuly. Na $\mathbb{R}^2 \setminus O_y$, kde $O_y = \{(0,y) : \ y \in \mathbb{R}\}$ značí osu y, tedy platí, že F je součtem dvou spojitých funkcí y a $-\sin\frac{1}{x}$ a je zde tedy spojitá. Tudíž $G \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y)$ je vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F, a je to tedy uzavřená množina, tj. $\overline{G \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y)} = G \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y)$. Jelikož $\mathbb{R}^2 \setminus (O_y)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak z Příkladu (8.e) plyne $\overline{G} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y) = \overline{G \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y)} = G \cap (\mathbb{R}^2 \setminus O_y)$. Zbývá tedy rozhodnout, které body na ose y leží v $\overline{G}$.

Je-li $|y_0| > 1$, pak zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, že i $|y_0| - \varepsilon > 1$. Je-li $(x,y) \in U_\varepsilon((0,y_0))$, pak $\varepsilon^2 = (x-0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + (y-y_0)^2 \geq (y-y_0)^2$ a tedy $\varepsilon \geq |y-y_0|$. To znamená, že $|y| = |(y-y_0)+y_0| \geq |y_0| - |y-y_0| \geq |y_0| - \varepsilon > 1$. Tedy $U_\varepsilon((0,y_0))$ má prázdný průnik s G a tedy $(0,y_0) \notin \overline{G}$.

Je-li naopak $|y_0| \leq 1$, pak zvolme $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tak, že $\sin\alpha = y_0$. Pak i $\sin(\alpha + 2k\pi) = y_0$ a tedy i $\sin(\frac{1}{x_k}) = y_0$, kde $x_k = \frac{1}{\alpha + 2k\pi}$, $k = 1,2,3,\cdots$. Pak posloupnost $\{(x_k, y_0)\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje pro $k \to +\infty$ k $(0,y_0)$. Dále $(x_k, y_0) \in G$ pro $k = 1,2,\cdots$ a tedy $(0,y_0) \in \overline{G}$.

Závěr: $\overline{G} = G \cup \{(0,y) : \ y \in [-1,1]\}$.

(4) Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin

(4.a) Množina M všech racionálních čísel z intervalu $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

Řešení: Víme, že libovolný otevřený interval obsahuje alespoň jedno racionální a jedno iracionální číslo. Je-li $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ a $\varepsilon > 0$, pak interval $U_\varepsilon(q) = \{x : \ |x-q| < \varepsilon\}$ neleží v M a tedy $M^\circ = \emptyset$. Je-li nyní q libovolné z $[0,1]$, pak $U_\varepsilon(q)$ obsahuje prvek z M a prvek z $M^{\complement} := \mathbb{R} \setminus M$. Je-li $q < 0$ nebo $q > 1$, pak zřejmě existuje $\varepsilon > 0$ malé tak, aby $U_\varepsilon(q) \cap M = \emptyset$. Ukázali jsme tedy, že $\overline{M} = [0,1]$. Konečně $\partial M = \overline{M} \setminus M^o = \overline{M} = [0,1]$.

(4.b) Množina M všech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti

$$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0.$$

Řešení: V postupu budeme používat tvrzení, které dokážeme v příkladě (8). Označme $U_1 := \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ a $U_2 = \{(x,y) : \ y > 0\}$. Pak U_1, U_2 jsou otevřené, neboť funkce $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ a $f_2(x,y) = y$ jsou spojité a U_i je vzor otevřeného intervalu při zobrazení f_i, $i = 1,2$, konkrétně $U_1 = f_1^{-1}\big((-\infty,1)\big)$, $U_2 = f_2^{-1}\big((0,+\infty)\big)$. Dále zřejmě platí

$$\overline{U}_1 = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}, \ \ \overline{U}_2 = \{(x,y) : \ y \geq 0\}$$

a tedy $M = U_1 \cap \overline{U}_2$. Dále máme $\mathrm{ext}U_2 = \{(x,y) : \ y < 0\}$ a tedy $\partial(\mathrm{ext}U_2) = \partial U_2$. Tudíž

$$M^o = (U_1 \cap \overline{U}_2)^o = U_1^o \cap (\overline{U}_2)^o = U_1^o \cap U_2^o = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0\}.$$

Dále

$$\overline{M} = \overline{U_1 \cap \overline{U_2}} \subseteq \overline{U}_1 \cap \overline{\overline{U_2}} = \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}.$$

Zde jsme použili rovnost $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$ (rozmyslete si, proč platí). Ověříme ještě obrácenou inkluzi. Přitom

$$\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \setminus M = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\}$$

je vlastně horní jednotková půlkružnice se středem v počátku. Je ale patrné, že každé otevřené okolí bodu na horní půlkružnici musí protnout M. Tedy platí $\overline{M} = \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$. Konečně

$$\begin{aligned}\partial M = \overline{M} \setminus M^o = \overline{M} \setminus (U_1^o \cap U_2^o) &= (\overline{M} \setminus U_1^o) \cup (\overline{M} \setminus U_2^o)\\ &= \big(\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\} \setminus \{(x,y):\ x^2+y^2 < 1\}\big)\\ &\cup \big(\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\} \setminus \{(x,y):\ y > 0\}\big)\\ &= \{(x,y):\ x^2+y^2 = 1,\ y \ge 0\} \cup \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ y = 0\}.\end{aligned}$$

(7) Je množina

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2 \le xyz < 4\}$$

omezená?

Řešení: Nechť $R > 0$ je libovolné. Pak trojice $(\frac{3}{4R^2}, 2R, 2R)$ splňuje obě nerovnosti v definici M a tedy $(\frac{3}{4R^2}, 2R, 2R) \in M$. To znamená, že koule se středem v počátku o poloměru R neobsahuje M. M tedy nemůže být omezená.

(13) Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažte

a) $\overline{A} = \mathrm{int}A \cup \partial A$ (disjunktně).

b) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$.

h) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Řešení (a): Víme, že rovnost množin platí (to je definice), stačí dokázat tedy, že $\mathrm{int}A \cap \partial A = \emptyset$. Předpokládejme pro spor, že průnik je neprázdný a obsahuje tedy nějaký bod, který si označme jako x. Jelikož $x \in \mathrm{int}A$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Jelikož současně $x \in \partial A$, pak $U_\varepsilon(x)$ musí z definice hranice obsahovat bod, který nepatří do A. To je spor.

Řešení (b): Nechť $x \in (A \cap B)^o$, pak existuje ε tak, že $U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$. Tudíž $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ a $U_\varepsilon(x) \subseteq B$. To ale znamená, že $x \in \mathrm{int}A$ a $x \in B^o$, tedy $x \in \mathrm{int}A \cap B^o$. Dokázali jsme $\subseteq$.

Je-li naopak $x \in \mathrm{int}A \cap B^o$, pak existují $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Pak ale $U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, kde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tedy $x \in (A \cap B)^o$. Tím jsme dokázali $\supseteq$.

Řešení (h): Je-li $x \in \overline{A \cap B}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Speciálně $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ a $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$. Ukázali jsme, že libovolné otevřené okolí x má netriviální průnik s A i s B. Tedy $x \in \overline{A}$ a $x \in \overline{B}$, nutně tedy $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.