Řešení vybraných úloh
4. sada

1.a) Najděte maximální řešení ODR

$$y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x. \tag{1}$$

Řešení: Vidíme, že rovnice (1) degeneruje v bodech, kde $\cos x = 0$. Na intervalech, kde je $\cos x \neq 0$, můžeme vydělit rovnici funkcí $\cos x$. Dostaneme

$$y' - y \tan x = \cos x,\ x \in (\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Dále

$$-\int \tan x \ dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} \ dx = \ln|\cos x| + c.$$

Integrační faktor rovnice (1) je tedy $e^{\ln|\cos x|} = |\cos x|$. Abychom se nemuseli zabývat znaménkem[1] $\cos x$ na $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je pevně zvolené, tak vynásobíme rovnici (2) funkcí $\operatorname{sign}(\cos x)|\cos x| = \cos x$. Dostaneme

$$(y \cos x)' = y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x. \tag{3}$$

Tím jsme sice dospěli k původní rovnici (1), ale na druhou stranu jsme vyjádřili levou stranu jakožto derivaci funkce $y \cos x$, a to bylo naším cílem. Dále

$$\int \cos^2 x \ dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \ dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + d,\ d \in \mathbb{R}.$$

Tudíž z (3) plyne

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + d\Big) = \frac{x + 2d}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2},\ x \in (\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Je patrné, že funkci y nelze pro žádné d spojitě rozšířit na žádný větší otevřený interval obsahující $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. Tedy (4) jsou všechna maximální řešení (1).

1.g) Najděte maximální řešení rovnice

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x), \tag{5}$$

které je omezené pro $x \to \frac{\pi}{2}$.

Řešení: Podobně jako v příkladu 1.a), rovnice (5) degeneruje v bodech, kde $\sin 2x = 0$. Na intervalech, kde $\sin 2x \neq 0$, můžeme touto funkcí vydělit a dostaneme novou rovnici

$$y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{2\cos x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin x},\ x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Dále integrací spočteme

$$-\int \frac{2 \ dx}{\sin 2x} = \ln\Big|\frac{\cos x}{\sin x}\Big| + c = \ln|\cot x| + c.$$

Integrační faktor rovnice (1) je tedy $e^{\ln|\cot x|} = \big|\cot x\big|$. Abychom se nemuseli zabývat znaménkem $\cot x$ na $x \in \big(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\big)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je pevně zvolené, tak vynásobíme rovnici (6) funkcí $\operatorname{sign}(\cot x)|\cot x| = \cot x$. Dostaneme

$$\big(y \cot x\big)' = y' \cot x - \frac{1}{\sin^2 x} y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dále

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \ dx = -\frac{1}{\sin x} + d,\ d \in \mathbb{R}.$$

Tudíž

$$y(x) = \tan x\big(d - \frac{1}{\sin x}\big) = d \tan x - \frac{1}{\cos x} = \frac{d \sin x - 1}{\cos x} \tag{7}$$

řeší (6) na $x \in \big(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\big),\ k \in \mathbb{Z}$.

[1] Všimněte si, že $\cos x$ nemění znaménko na $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Pro $x \to \frac{\pi}{2}$ je limita jmenovatele rovná 0, zatímco limita čitatele je $d-1$. Pro $d \neq 1$ tedy funkce y není omezená na libovolném prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$. Pro $d=1$ je $y(x)$ omezená na prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$ a dokonce platí

(8) $$\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}},\ x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pravá strana rovnosti v (8) je nekonečně diferencovatelná funkce na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Navíc funkce

(9) $$y_{max}(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}},\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

řeší (5) díky lemmatu o lepení na celém intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Jelikož limity (9) v krajních bodech intervalu jsou nevlastní, pak tuto funkci nelze spojitě rozíšířit na žádný větší interval.

Závěr: Funkce daná (9) na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je maximální řešení (5), které je omezené na prstencovém okolí $\frac{\pi}{2}$.

2.a) Najděte všechna maximální řešení rovnice

(10) $$xy' - 2x\sqrt{y} = 4y.$$

Řešení: Úloha dává smysl jen pro $y \geq 0$, navíc $y = 0$ je řešením (10). Rovnice degeneruje v bodě $x = 0$. Dále si všimneme, že z (10) plyne $y(0) = 0$, tj. každé řešení, které je definované v nule, prochází počátkem.

Jedná se o nelineární Bernoulliho rovnici s funkcí $y^{\frac{1}{2}}$. Zavedeme novou funkci $u(x) = \sqrt{y(x)} = y^{1-\frac{1}{2}}$, tudíž $y(x) = u^2(x)$. Dosadíme-li u do (10), pak dostaneme lineární rovnici prvního řádu

(11) $$2xuu' - 2xu = 4u^2.$$

Jestliže naopak u řeší (11), pak u^2 řeší (10). Stačí nám tedy najít všechna maximální nezáporná řešení (11).

Vidíme, že rovnice (11) degeneruje v bodě $x = 0$ a že $u = 0$ je stacionární řešení. Předpokládejme dále, že $u > 0$ a $x \neq 0$. Vydělíme $2xu$ a dostaneme

(12) $$u' - 2\frac{u}{x} = 1.$$

Dále

$$-2\int \frac{dx}{x}\ dx = -2\ln|x| + c = \ln(x^{-2}) + c.$$

Integrační faktor rovnice (12) je tedy $e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$. Dostaneme

(13) $$(ux^{-2})' = x^{-2}u' - 2ux^{-3} = x^{-2}.$$

Dále

$$\int x^{-2}\ dx = -x^{-1} + C$$

a tudíž

(14) $$u \equiv u_C(x) = x^2(-x^{-1} + C) = -x + Cx^2,\ C \in \mathbb{R}.$$

O funkci u_C nyní předpokládáme, že je kladná, což dává omezení

$$u_C(x) = -x + Cx^2,\ x \in (-\infty, 0)\ \vee x \in (\frac{1}{C}, +\infty),\ C > 0,$$
$$u_C(x) = -x,\ x \in (-\infty, 0),\ C = 0,$$
$$u_C(x) = -x + Cx^2,\ x \in (\frac{1}{C}, 0),\ C < 0.$$

Funkce

$$y_C(x) = u_C^2(x),\ C \in \mathbb{R},$$

jsou tedy řešením (10) na svém definičním oboru.

Zbývá najít všechna maximální řešení (10). Maximální řešení zkusíme získat lepením funkcí y_C se stacionárním řešením $y = 0$, lepit přitom můžeme postupně v bodech $\frac{1}{C}, 0, \frac{1}{D}$, kde $C < 0$ a $D > 0$. To vede celkem na pět typů funkcí, a to

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \frac{1}{C}], \quad C < 0 \\ y_C(x), & x \in (\frac{1}{C}, 0), \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{D}], \qquad D > 0 \\ y_D(x), & x \in (\frac{1}{D}, +\infty), \end{cases} \\
y_2(x) &= \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \frac{1}{C}], \\ y_C(x), & x \in (\frac{1}{C}, 0), \\ 0, & x \in [0, +\infty), \quad D > 0 \end{cases} \\
y_3(x) &= \begin{cases} y_C(x), & x \in (-\infty, 0), \quad C \geq 0 \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{D}], \qquad D > 0 \\ y_D(x), & x \in (\frac{1}{D}, +\infty), \end{cases} \\
y_4(x) &= \begin{cases} y_C(x), & x \in (-\infty, 0), \quad C \geq 0 \\ 0, & x \in [0, +\infty), \end{cases} \\
y_5(x) &= 0, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Funkce $y_1, \cdots, y_5$ jsou zřejmě spojité na $\mathbb{R}$. Z Tvrzení B[2] pak plyne, že tyto funkce jsou řešením (10) na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Zbývá zkontrolovat, že všechny funkce y_i řeší (10) i v nule. Pomocí Věty o jednostranných derivacích se snadno ověří u každé funkce zvlášť, že y_i' je spojitá i v nule. Jelikož $y_i(0) = 0$, pak vidíme, že všechny funkce v (15) skutečně řeší (10) na celém $\mathbb{R}$.

Závěr: Všechna maximální řešení (10) jsou definovány na $\mathbb{R}$ a jsou tvaru jako v (15).

[2]Kapitola 7.3 ze skript http://www.karlin.mff.cuni.cz/ malek/new/images/a/a1/Sekce7.3b.pdf