Řešení vybraných příkladů
7. sada

c) Vyšetřete konvergenci řady

(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}.$$

Řesení: Je zřejmé, že řada (1) nekonverguje absolutně (víme, že harmonická řada diveguje k $+\infty$), stačí tedy určit zda konverguje neabsolutně. Označme

$$a_n = \frac{1}{\ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\ln n}{n}, \ n = 1, 2\cdots$$

Máme tedy rozhodnout, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. Zřejmě $a_n \searrow 0$ pro $n \to +\infty$, tj. a_n je nerostoucí posloupnost, která konverguje k nule. K tomu, abychom mohli použít Dirichletovo kritérium potřebujeme ukázat, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ má omezené částečné součty. Označme její n-tý částečný součet jako Σ_n.

Nyní si všimneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je tvaru:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} \\
&\quad +\frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \frac{\ln 7}{7} + \frac{\ln 8}{8} \\
&\quad\quad -\frac{\ln 9}{9} - \cdots \\
&\quad\quad\quad \cdots - \frac{\ln((2n)^2-1)}{(2n)^2-1} \\
&+\frac{\ln((2n)^2)}{(2n)^2} + \cdots + \frac{\ln((2n+1)^2-1)}{(2n+1)^2-1} \\
&\quad -\frac{\ln((2n+1)^2)}{(2n+1)^2} - \cdots - \frac{\ln((2n+2)^2-1)}{(2n+2)^2-1} \\
&\quad\quad\quad + \frac{\ln((2n+2)^2)}{(2n+2)^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Jelikož $\frac{\ln x}{x}$ je klesající pro $x > e$, pak pro sudé přirozené číslo n platí

$$\begin{gathered}
b_{n^2} > b_{n^2+1} > \cdots > b_{(n+1)^2-1} > 0, \\
b_{(n+1)^2} < b_{(n+1)^2+1} < \cdots < b_{(n+2)^2-1} < 0.
\end{gathered}$$

Jestliže nyní ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$ je splněno:

(2)
$$|b_{n^2}| + \cdots + |b_{(n+1)^2-1}| \geq |b_{(n+1)^2}| + \cdots + |b_{(n+2)^2-1}|,$$

pak podobně jako v důkazu Leibnizova kritéria dostaneme, že pro n sudé

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{n^2-1} < \Sigma_{n^2} < \Sigma_{n^2+1} < \cdots < \Sigma_{(n+1)^2-1}, \\
&\Sigma_{(n+1)^2-1} > \Sigma_{(n+1)^2} > \Sigma_{(n+1)^2+1} > \cdots > \Sigma_{(n+2)^2-1}, \\
&\Sigma_{n^2-1} \leq \Sigma_{(n+2)^2-1}, \ \Sigma_{(n+1)^2-1} \geq \Sigma_{(n+3)^2-1}.
\end{aligned}$$

Tato sada nerovností ale nutně znamená, že posloupnost $\{\Sigma_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je zdola omezená Σ_3 a shora omezená Σ_8. Pak už je ale omezená celá posloupnost $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Zbývá tedy dokázat nerovnost (2) pro libovolné $n \geq 2$, to jest:

$$\frac{\ln(n^2)}{n^2} + \cdots + \frac{\ln((n+1)^2-1)}{(n+1)^2-1} \geq \frac{\ln((n+1)^2)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\ln((n+2)^2-1)}{(n+2)^2-1}.$$

K důkazu (2) použijeme

Lemma 1. [1] *Nechť f je kladná spojitá nerostoucí funkce na $[\ell, +\infty)$, kde $\ell \in \mathbb{N}$. Pak pro $m \in \mathbb{N},\ m > \ell$ platí*

$$f(\ell+1) + f(\ell+2) + \cdots + f(m) \le \int_\ell^m f(x)\ dx \le f(\ell) + f(\ell+1) + \cdots + f(m-1).$$

Funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ splňuje předpoklady Lemmatu 1. na $[3, +\infty]$ a dává odhady:

$$\begin{aligned}\frac{\ln((n+1)^2)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\ln((n+2)^2-1)}{(n+2)^2-1} &\le \int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1} \frac{\ln x}{x}\ dx\\ &= \frac{1}{2}[\ln^2 x]_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1}\\ &= \frac{1}{2}\big(\ln^2((n+2)^2-1) - \ln^2((n+1)^2-1)\big),\\ &= \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1}\right)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n^2)}{n^2} + \cdots + \frac{\ln((n+1)^2-1)}{(n+1)^2-1} &\ge \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{\ln x}{x}\ dx\\ &= \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Jelikož $\ln^2$ je rostoucí na $[3, +\infty]$, pak k ověření (2) zbývá dokázat:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} \ge \frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1}. \tag{3}$$

To je ale nyní již snadné, neboť ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}((n+1)^2-1)(n+1)^2 &\ge n^2((n+2)^2-1)\\ (n+1)^4 - (n+1)^2 &\ge n^2(n^2+4n+3)\\ n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^2 - 2n - 1 &\ge n^4 + 4n^3 + 3n^2\\ 5n^2 + 2n &\ge 3n^2.\end{aligned}$$

Poslední nerovnost evidentně platí. Tudíž platí i (3). Tím je tento poněkud zdlouhavější příklad hotov.

d) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots \tag{4}$$

1. postup. Položme $a_n := \frac{1}{n}$ a nechť dále b_n, resp. S_n značí n-tý člen, resp. n-tý částečný součet posloupnosti

$$+1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - \cdots,$$

kde n probíhá $\mathbb{N}$. Pak a_n je klesající posloupnost, která konverguje k nule (to se běžně zapisuje jako $a_n \searrow 0$ pro $n \to +\infty$). Posloupnost S_n je tvaru

$$1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \cdots$$

[1] Lemma 1. se jednoduše dokáže ze základní vlastnosti Riemannova integrálu

$$\int_\ell^m f(x)\ dx = \sum_{i=\ell}^{m-1} \int_i^{i+1} f(x)\ dx.$$

Pak už stačí pro $i = \ell, \cdots, m-1$ sečíst triviální odhady

$$f(i+1) \le \int_i^{i+1} f(x)\ dx \le f(i),$$

které okamžitě plynou z monotonie funkce f.

Vidíme, že se jedná o periodickou posloupnost s peridou 6. Speciálně, $0 \leq S_n \leq 3,\ n \in \mathbb{N}$, a $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je omezená. Jsou splňeny předpoklady Dirichletova kritéria pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ a tato řada tedy konverguje.

Na druhou stranu řada nekonverguje absolutně, neboť $|a_n b_n| = a_n = \frac{1}{n}$ a víme, že harmonická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$.

2. postup. Zkusíme použít důkaz Leibnizova kriteŕia pro alternující řady. Označme jako s_n n-tý částečný součet řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Z předpisu řady okamžitě plynou nerovnosti

$$s_{6n} < s_{6n+1} < s_{6n+2} < s_{6n+3},\ s_{6n+3} > s_{6n+4} > s_{6n+5} > s_{6n+6},\ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

kde definujeme $s_0 := 0$. Dále

$$s_{6n+3} = s_{6n-3} - \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3} < s_{6n-3},\ n = 1, 2, \cdots$$

$$s_{6n+6} = s_{6n} + \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n+4} - \frac{1}{6n+5} - \frac{1}{6n+6} > s_{6n},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

To znamená, že

$$s_0 < s_6 < s_{12} < \cdots < s_{6n} < s_{6n+6} < \cdots < s_{6n+3} < s_{6n-3} < \cdots < s_9 < s_3.$$

Konečně budeme potřebovat

$$s_{6n+3} = s_{6n} + \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3},$$

což dává pro $n \geq 1$ horní odhad

$$s_{6n+3} - s_{6n} = \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3} < \frac{3}{6n+1} < \frac{1}{2n}.$$

Nechť nyní $\varepsilon > 0$ je pevné. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\varepsilon < \frac{1}{2n_0}$. Je-li $n \geq 6n_0$, pak z toho, co jsme uvedli výše, plynou neronosti:

$$s_{6n_0} \leq s_n \leq s_{6n_0+3}.$$

Je-li $m \geq n_0$, pak i $s_{6n_0} \leq s_m \leq s_{6n_0+3}$. Tudíž

$$|s_n - s_m| \leq |s_{6n_0+3} - s_{6n_0}| < \frac{1}{2n_0} < \varepsilon.$$

Ověřili jsme, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku a tedy konverguje.

e) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Označme jako M množinu těch $x \in \mathbb{R}$, pro která řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \tag{6}$$

konverguje a jako $s(x),\ x \in M$, součet této řady. Pak je zřejmé, že $0 \in M,\ s(0) = 0$. Dále je-li $x \in M$ pak zřejmě i $-x \in M$ a pro takové x platí $s(-x) = -s(x)$. Můžeme se tedy omezit na případ $x > 0$.

Zvolme nyní pevně $x > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $x < 3^{n_0}\frac{\pi}{2}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $0 < \frac{x}{3^n} < \frac{\pi}{2}$ a tedy $0 < \sin(\frac{x}{3n}) < 1$. Tudíž řada

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \tag{7}$$

obsahuje pouze kladné členy. Dále z Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \sin(\frac{x}{3^n})}{x(\frac{2}{3})^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{x}{3^n})}{\frac{x}{3^n}} = 1.$$

Jelikož
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} x\left(\frac{2}{3}\right)^n = x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3x\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0},$$
pak z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada (7) konverguje. Tudíž konverguje i řada (6), a to dokonce absolutně, neboť
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| &= \sum_{n=1}^{n_0-1}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)|\\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big) < +\infty.\end{aligned}$$

Je-li $x<0$, pak
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| &= \sum_{n=1}^{n_0-1}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)|\\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1}|2^n \sin\big(\frac{x}{3^n}\big)| + \sum_{n=n_0}^{+\infty}2^n \sin\big(\frac{-x}{3^n}\big) < +\infty.\end{aligned}$$
Ukázali jsme, že řada (6) konverguje abolutně pro každé $x\in\mathbb{R}$.

f) Vyšetřete konvergenci řady

(8)
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Řesení: Porovnáním s řadou $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ vidíme, že řada (8) nekonverguje absolutně. Označme n-tý člen řady jako a_n. Potom
$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\,\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$
Položme
$$b_n := \frac{\sqrt{n}}{n-1},\ c_n = \frac{1}{n-1},\ n = 2,3,\cdots.$$
Uvažme ještě funkci
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1},\ x\in(1,+\infty).$$
Platí
$$f'(x) = -\frac{1+x}{2(x-1)^2\sqrt{x}} < 0,\quad x\in(1,+\infty)$$
Vidíme, že $f(n) = b_n \searrow 0$ pro $n\to+\infty$. Dále $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty, z Dirichletova kritéria tedy plyne, že řada $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n b_n$ konverguje se součtem $S\in\mathbb{R}$. Na druhou stranu $\sum_{n=2}^{+\infty}c_n = +\infty$. To znamená, že
$$\sum_{n=2}^{N}a_n = \sum_{n=2}^{N}(-1)^n b_n - \sum_{n=2}^{N}c_n \to S-\infty = -\infty,\ N\to+\infty.$$
Řada (8) tedy nekonverguje.

h) Vyšetřete konvergenci řady

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^2}\frac{1}{\mathrm{e}^n}.$$

(1) Platí

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)}.$$

Dále

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)&=\lim_{n\to+\infty}n\big(n\ln(1+\frac{1}{n})-\ln e\big)\\&=\lim_{n\to+\infty}n\Big(n\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(n^{-3})\big)-1\Big)\\&=\lim_{n\to+\infty}n\Big(-\frac{1}{2n}+O(n^{-2})\Big)\\&=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}+O(n^{-1})=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Vidíme, že není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

a řada tedy nekonverguje.

i) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}). \tag{10}$$

Řesení: Je jasné, že pro $k=0$ je součet řady (10) roven nule. Nechť dále $k\neq 0$. Platí

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})&=\sin\left(\pi n\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)\\&=\sin\left(\pi n\big(1+\frac{k^2}{2n^2}+O(n^{-4})\big)\right)\\&=\sin\left(\pi n+\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\right)\\&=\sin(\pi n)\cos\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)+\cos(\pi n)\sin\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\\&=(-1)^n\sin\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\\&=(-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3}),\ n\to+\infty.\end{aligned}$$

To znamená, že

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})| &= |(-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})| \\
&= \sqrt{\left((-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\right)^2} \\
&= \sqrt{(\pi^2\frac{k^4}{4n^2}+O(n^{-4}))} \\
&= \sqrt{\pi^2\frac{k^4}{4n^2}(1+\frac{4n^2}{\pi^2k^4}O(n^{-4}))} \\
&= \pi\frac{k^2}{2n}\sqrt{1+O(n^{-2}))} \\
&= \pi\frac{k^2}{2n}(1+O(n^{-2})) \\
&= \pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3}),\ n\to+\infty.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že

$$|\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})| \cong \pi\frac{k^2}{2n},\ n\to+\infty.$$

Jelikož harmonická řada diverguje, pak řada (10) nekonverguje absolutně pro $k\neq 0$.

Zbývá rozhodnout, zda řada (10) konverguje neabsolutně. Výše jsme ukázali, že

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3}),\ n\to+\infty. \tag{11}$$

Z Dirichletove kritéria plyne, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}$ konverguje. Stačí opět použít, že $\frac{1}{2n}\searrow 0$ pro $n\to+\infty$ a že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\pi k^2$ má omezené částečné součty. Zbývá ještě rozhodnout zda konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, kde definujeme

$$b_n := \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) - (-1)^n\pi\frac{k^2}{2n},\ n=1,2,\cdots \tag{12}$$

Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, a to dokonce absolutně. Tím pádem musí konvergovat i (10), neboť je součtem absolutně konvergentní a konvergentní řady.

Z (11) okamžitě plyne, že $b_n = O(n^{-3})$ pro $n\to+\infty$. To znamená, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ a $K\geq 0$ tak, že pro každé $n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ |b_n|\leq Kn^{-3}$. Položme $c_n := b_n.n^3,\ n=1,2,\cdots$. Pak $|c_n| = |n^3 b_n|\leq K$ pro $n\geq n_0$. Tudíž $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je omezená shora $\max\{c_1,\cdots,c_{n_0-1},K\}$ a omezená zdola $\min\{c_1,\cdots,c_{n_0-1},-K\}$. To znamená, že $\{|c_n|\}_{n=1}^{+\infty}$ je omezená, tj. existuje $L\geq 0$ tak, že $L\geq|c_n|$ pro $n=1,2,\cdots$ Pro libovolné $N\in\mathbb{N}$ platí tudíž odhad:

$$\sum_{n=1}^{+N}|b_n| = \sum_{n=1}^{+N}\frac{|c_n|}{n^3}\leq\sum_{n=1}^{+N}\frac{L}{n^3} = L\sum_{n=1}^{+N}\frac{1}{n^3}.$$

Součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je tedy shora odhadnut výrazem $L\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}<+\infty$.

Závěr: řada (10) konverguje absolutně pro $k=0$ a jinak konverguje neabsolutně.

m) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\sin^2 n}{n}. \tag{13}$$

Řesení: Platí

$$a_n := \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n},\ n=1,2,\cdots$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\cos(2n)}{2n}. \tag{14}$$

Z Dirichletova kritéria plyne, že řada konverguje

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ \frac{1}{2n}.$$

Skutečně, $\frac{1}{2n} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty. Jelikož $\frac{1}{n} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$, pak i řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ \frac{\cos(2n)}{2n}$$

konverguje, jestliže ukážeme, že $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos(2n)$ má omezené částečné součty. Počítejme:

$$(-1)^n \cos(2n) = \cos(\pi n)\cos(2n) = \cos(n(\pi+2)).$$

Stačí tedy ukázat, že $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n(\pi+2))$ má omezené částečné součty. Toto si dokážeme v Lemmatu 2 na konci příkladu. Tedy řada (13) konverguje.

Na druhou stranu

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \ \frac{\cos(2n)}{2n}.$$

První řada napravo má součet $+\infty$, zatímco druhá z Dirichletova kritéria konverguje k nějakému $A \in \mathbb{R}$ (ukáže se podobně jako pro $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ \frac{\cos(2n)}{2n}$, sami si doplňte detaily). Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = +\infty - A = +\infty.$$

Závěr: řada (13) konverguje neabsolutně.

Lemma 2. *Platí*

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \cos(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$
$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \sin(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

kde $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. *Speciálně, obě řady jsou v absolutní hodnotě shora odhadnuty* $\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

K důkazu budeme potřebovat následující vztahy

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ \cos(x) = \Re(e^{ix}),\ \sin x = \Im(e^{ix}) = (e^{ix}-e^{-ix})/2i,\ x \in \mathbb{R},$$

kde $\Re$, resp. $\Im$ značí reálnou, resp. imaginární část komplexního čísla. Položme dále $q = e^{ix},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pak Moivreova věta dává $q^n = e^{inx},\ n \in \mathbb{N}$. Tento vztah ale platí pro každé $n \in \mathbb{R}$. Dále platí

$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)},\ x, y \in \mathbb{R}$. Tudíž

$$\begin{aligned}
1 + q + q^2 + \cdots + q^n &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)\frac{q-1}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{q^{n+\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{2}}(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}})}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{2}}\frac{q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}}}{2i}}{\frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2i}} \\
&= (\cos(\frac{nx}{2}) + i\sin(\frac{nx}{2}))\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

Všimněte si, že $q \neq 1$ pro $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dokazované vztahy se pak dostanou porovnáním reálné a imaginární části právě rozepsané rovnosti.

s) Vyšetřete konvergenci řady

(15)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{\sin(n\pi/4) + n^p}.$$

Řesení: Označme $a_n := \sin(n\pi/4),\ n = 1, 2, \cdots$. Pak

$$a_n = \begin{cases} 0,\ n = 0 \mod 4, \\ \pm 1,\ n = \pm 2 \mod 8, \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n = \pm 1, \pm 3 \mod 8. \end{cases}$$

Zde $\mod m$ značí zbytek po dělení m. Dále

(16)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + n^p}\frac{n^p - a_n}{n^p - a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-a_n^2}{n^{2p} - a_n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n n^p}{n^{2p} - a_n^2}.$$

Nejprve uvažujme první řadu na pravé straně. Úpravou dostaneme

(17)
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{n^{2p} - a_n^2} &= \frac{\frac{1}{2}}{1^{2p} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{2p} - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{3^{2p} - \frac{1}{2}} + 0 \\
&+ \frac{\frac{1}{2}}{5^{2p} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{6^{2p} - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{7^{2p} - \frac{1}{2}} + 0 + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(4n-1)^{2p} - \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(4n-3)^{2p} - \frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)^{2p} - \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že obě řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)^{2p} - \frac{1}{2}}$$

konvergují právě tehdy, když $2p > 1$, tj. $p > \frac{1}{2}$.

Pro druhou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n n^p}{n^{2p}-a_n^2}=\frac{\frac{1^p}{\sqrt{2}}}{1^{2p}-\frac{1}{2}}+\frac{2^p}{2^{2p}-1}+\frac{\frac{3^p}{\sqrt{2}}}{3^{2p}-\frac{1}{2}}+0$$

$$-\frac{\frac{5^p}{\sqrt{2}}}{5^{2p}-\frac{1}{2}}-\frac{6^p}{6^{2p}-1}-\frac{\frac{7^p}{\sqrt{2}}}{7^{2p}-\frac{1}{2}}+0+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)^p}{(4n-2)^{2p}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-1)^p}{(4n-1)^{2p}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-3)^p}{(4n-3)^{2p}-\frac{1}{2}}.$$

Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že tyto tři řady na pravé straně konvergují absolutně právě tehdy, když $p>1$. Řada (15) tedy konverguje absolutně právě tehdy, když $p>1$.

Zbývá určit pro která p řada (15) konverguje. Je-li

$$b_n:=\frac{n^p}{n^{2p}-1},\ n=2,3,\cdots$$

pak $b_n\to 0$ pro $n\to+\infty$ právě tehdy, když $p>0$. Navíc posloupnost je klesající (což plyne ze znaménka derivace funkce $\frac{x^p}{x^{2p}-1}$, $x>1$). Z Dirichletova kritéria plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)^p}{(4n-2)^{2p}-1}$$

konverguje pro $p>0$. Je-li $p\le 0$, pak řada nekonverguje. Stejný postup i závěry platí i pro řady

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-1)^p}{(4n-1)^{2p}-\frac{1}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-3)^p}{(4n-3)^{2p}-\frac{1}{2}}.$$

Připomeňme, že (17) konverguje jen pro $p>1/2$. Tudíž i řada (15) konverguje pro $p>1/2$.

Závěr: řada (15) konverguje absolutně pro $p>1$, pro $1\ge p>\frac{1}{2}$ konverguje neabsolutně a jinak nekonverguje.