Řešení vybraných příkladů
6. sada

2.a) Máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}{2^n} &= \frac{1}{2}-\big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\big)+\big(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\big)-\big(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}\big)+\cdots\\ &= \frac{1}{2}-\frac{2+1}{2^3}+\frac{2+1}{2^5}-\frac{2+1}{2^7}+\cdots\\ &= \frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{8.4^1}-\frac{3}{8.4^2}+\cdots\\ &= \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\frac{4}{5}=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili vzorec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q},\ |q|<1$$

pro součet geometrické řady a běžné úpravy.

2.c) Nejprve si všimneme rozkladu

$$\frac{1}{n(n+3)}=\frac{\frac{1}{3}}{n}-\frac{\frac{1}{3}}{n+3}.$$

Pak pro $N>5$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+N}\frac{1}{n(n+3)} =&\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\cdots+\frac{1}{(N-2)(N+1)}+\frac{1}{(N-1)(N+2)}+\frac{1}{N(N+3)}\\ =&\frac{1}{3}\Bigg(\big(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\big)+\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\big)+\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\big)+\cdots\\ &\cdots+\big(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\big)+\big(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\big)+\big(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\big)\Bigg)\\ =&\frac{1}{3}\Bigg(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\Bigg).\end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $N\to+\infty$ dostáváme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{6+3+2}{3.6}=\frac{11}{18}.$$

3.a) Je zřejmé, že $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2-1}$, $n \geq 2$. Tudíž pro $N > 2$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2+1} \\ &< \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{(2-1)(2+1)} + \cdots + \frac{1}{(N-1)(N+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left((\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili stejný trik jako v 2.c). Posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

je shora omezená a tedy řada konverguje.

3.b) Platí $\frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy pro $N \in \mathbb{N}$ máme

(1)
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n(n+2)} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to +\infty \quad \text{pro} \quad N \to +\infty.$$

To znamená, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ není omezená shora a řada tedy z definice diverguje.

4.a) Platí

(2)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} &= \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}})} \cong \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \ n \to +\infty.\end{aligned}$$

Dále využijeme toho, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$. Speciálně

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Z (2) a z limitního srovnávacího kritéria pro řady tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

konveguje.

4.d) Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n n^{\frac{1}{n}}}{n^n(1+\frac{1}{n^2})^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{n^2}{n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{n^2}{n}} e^{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{n^2}{n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \big(\frac{n}{e}\big)^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(\frac{n}{e})}{n}} = 1.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili

$$\lim_{n\to+\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^n = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = (\frac{e}{e})^0 = 1^0 = 1.$$

Není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

a řada tedy nutně diverguje.

4.e) Porovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ vidíme, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} \tag{3}$$

může konvergovat jen pro $\alpha > 1$. Dále využijeme Stirlingovu formuli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\big(\frac{n}{e}\big)^n} = 1.$$

Pak pro $\alpha > 1$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} &= \frac{\ln\left(\frac{n!\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}\right)}{n^\alpha} \\
&= \frac{\ln\big(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}\big) + \ln\big(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\big)}{n^\alpha} \\
&\cong \frac{\ln(\sqrt{2\pi n}\big(\frac{n}{e}\big)^n)}{n^\alpha} \\
&= \frac{\ln(n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\big(\frac{1}{e}\big)^n)}{n^\alpha} \\
&= \frac{(n+\frac{1}{2})\ln n + \ln(\sqrt{2\pi}) - n\ln e}{n^\alpha} \\
&\cong \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}, \quad n\to+\infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

Nyní stanovíme pro která α konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}. \tag{5}$$

Porovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ vidíme, že řada (5) může konvergovat jen pro $\alpha - 1 > 1$, tj. $\alpha > 2$. Je-li $\alpha > 2$, pak zvolme $\varepsilon > 0$ malé tak, aby $\alpha - \varepsilon > 2$. Jelikož

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0,$$

pak nutně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \frac{\ln n}{n^\varepsilon} < 1$. Pak pro $N > n_0$ přirozené platí odhad

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1-\varepsilon} n^\varepsilon} < \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}} < +\infty.$$

Ukázali jsme, že řada (5) má pro $\alpha > 2$ shora omezenou posloupnost horních součtů a tedy skutečně konverguje. Řada (5) tudíž konverguje právě tehdy, když $\alpha > 2$. Z (4) a z limitního srovnávacího kritéria pro řady tedy plyne, že i řada (3) konverguje právě tehdy, když $\alpha > 2$.

4.h) Označme

$$a_n := \frac{2.5.8\cdots(3n-1)}{1.5.9\cdots(4n-3)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1.$$

Z limitního podílového kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

4.j) Označme n-tý člen řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})^n}$$

jako $a_n := \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})^n}$. Jedná se o řadu s kladnými prvky a můžeme použít d'Alembertovo kritérium. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})}.$$

Limita ve jmenovateli je evidentně $\frac{\pi}{3}$ a zbývá tedy určit limitu v čitateli. Z l'Hospitalova pravidla plyne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0.$$

Z Heineho věty pak máme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$$

a použitím věty o limitě složené funkce dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Vidíme tedy, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} < 1.$$

Z d'Alembertova kritérium okamžitě dostáváme, že řada konverguje.

4.m) K určení konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q},\ p,q\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

nejprve uvažme speciální případ $q=0$. Je-li $p\le 0$, pak platí

$$\frac{1}{n(\ln n)^p}\ge\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, pak i řada (6) má součet $+\infty$. Nyní můžeme předpokládat, že $p>0$. Uvažujme funkci

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p},\ x\in(3,+\infty).$$

Ta je klesající, neboť je součinem dvou kladných klesajících funkcí (případně se o tom můžeme přesvědčit ze znaménka f'). Dále víme, že integrál

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dy}{y^p},\quad y=\ln x,$$

konverguje právě tehdy, když $p>1$. Z integrálního kritéria tedy plyne, že (6) konverguje pro $p>1, q=0$ a diverguje pro $q=0$ a $0<p\le 1$. Pro $q=0$ tedy řada konveguje právě tehdy, když $p>1$.

Nyní můžeme probrat obecný případ. Všimněme si, že pro $\varepsilon,s\in\mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^\varepsilon(\ln\ln x)^s=\lim_{y\to+\infty}y^\varepsilon(\ln y)^s=\begin{cases}+\infty, & \varepsilon>0,\\ 0, & \varepsilon<0.\end{cases} \tag{7}$$

Ve (7) jsme v první rovnosti použili větu o limitě složené funkce pro substituci $y=\ln x$. Speciálně tato limita vůbec nezávisí na s pro $\varepsilon\ne 0$.

Je-li nyní $p<1$, pak zvolne $\varepsilon>0$ tak, aby i $p+\varepsilon<1$. Pak z (7) plyne, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že pro každé $n\ge n_0$ platí odhad:

$$\frac{(\ln n)^\varepsilon}{(\ln\ln n)^q}\ge 1.$$

Tudíž

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}}\frac{(\ln n)^\varepsilon}{(\ln\ln n)^q}\ge\frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}}.$$

Jelikož jsme již ukázali

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}}=+\infty,$$

pak ze srovnávacího kritéria pro řady plyne, že i (6) diverguje pro $p<1$ a q libovolné.

Je-li nyní naopak $p>1$, pak zvolne $\varepsilon>0$ tak, aby i $p-\varepsilon>1$. Pak z (7) plyne, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že pro každé $n\ge n_0$ platí odhady:

$$\frac{(\ln n)^{-\varepsilon}}{(\ln\ln n)^q}\le 1$$

a

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}}\frac{(\ln n)^{-\varepsilon}}{(\ln\ln n)^q}\le\frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}}.$$

Jelikož jsme již dříve ukázali, že

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}}<+\infty,$$

pak ze srovnávacího kritéria pro řady plyne, že i (6) konverguje pro $p>1$ a q libovolné.

Nyní zbývá případ $p=1$ a $q\in\mathbb{R}$. Je-li $q\le 0$, pak platí odhad

$$\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q}\ge\frac{1}{n\ln n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Vidíme, že pro $p=1$ a $q\le 0$ řada (6) diveruje. Můžeme tedy předpokládat, že $q>0$. Pak funkce

$$g(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q},\ x\in(3,+\infty).$$

je zjevně klesají (ze stejného důvodu jako funkce f). Platí

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln\ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dy}{y(\ln y)^q}$$

a už víme, že tento integrál konverguje právě tehdy, když $q > 1$.

Závěr: řada (6) konverguje právě tehdy, když $p > 1$ nebo $p = 1,\ q > 1$.

4.p) Položme

$$a_n := \left(\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}\right)^p,\ p \in \mathbb{R}.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^p\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{p}{2n+2} + O\left((\frac{1}{2n+2})^2\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{p}{2n+2} + O\left((\frac{1}{2n+2})^2\right)\right) = \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Z Raabeho kritéria plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{8}$$

konverguje pro $p > 2$ a diverguje pro $p < 2$. Je-li $p = 2$, pak

$$a_{n+1} = (1 - \frac{1}{2n+2})^2 a_n = \big(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+2)^2}\big)a_n > (1 - \frac{1}{n+1})a_n = \frac{n}{n+1}a_n.$$

Indukcí dle n dostáváme

$$a_{n+1} > \frac{n}{n+1}a_n > \frac{n-1}{n+1}a_{n-2} > \cdots > \frac{1}{n+1}a_1 = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Tudíž součet řady (8) je zdola odhadnut součtem řady $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$. Tudíž (8) diverguje pro $p = 2$.