Řešení dú
7. sada

r) Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řady

(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}},\ r\in\mathbb{R}.$$

Řešení: Jelikož $\sqrt[n]{n}\to 1$ pro $n\to+\infty$, pak máme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}n^{-p}=\begin{cases}+\infty, & p<0,\\ 1, & p=0,\\ 0, & p>0.\end{cases}$$

Vidíme, že nutná podmínka pro konvergenci řady je splněna jen pro $p>0$.

Už víme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-p}$ konverguje jen pro $p>1$ a diverguje jinak. Z limitního srovnávacího kritéria tedy plyne, že řada konverguje absolutně právě tehdy, když $p>1$.

Zbývá rozhodnou o konvergenci řady pro $p\in(0,1]$. Jelikož $\sum_n(-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{n^{-p}\}_n$ konverguje monotónně k nule (jedná se zřejmě o klesající posloupnost), pak z Dirichletova kritéria plyne konvergence řady

(2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$$

pro $p>0$. Dále ze znaménka derivace funkce $\sqrt[x]{x}$ plyne, že tato funkce je klesající na $(e,+\infty)$ a omezená. Tudíž posloupnost $\{n^{-\frac{1}{n}}\}$ je rostoucí od $n=2$ a omezená (přitom je shora 1 a zdola $3^{-\frac{1}{3}}$). Z Abelova kritéria tedy plyne, že řada (1) konverguje, neboť:

- řada (2) konverguje a
- $\{n^{-\frac{1}{n}}\}_n$ je monotonní (pro n dost velké) a omezená.

Závěr: řada konverguje absolutně pro $p>1$, konverguje neabsolutně pro $p\in(0,1]$ a jinak nekonverguje.