Řešení vybraných příkladů a DÚ
2. sada

(1.e) Nejprve musíme rozhodnout, pro která x platí $\ln x = \ln^2 x$. Substitucí $y = \ln x$ dostaneme $y = y^2$ a tedy $y = 0,\ y = 1$. To znamená, že $x = 1$ nebo $x = e$. Přitom platí, že $\ln x \geq \ln^2 x$ na $[1, e]$ a $\ln^2 x > \ln x$ na $(0, 1)$ a $(e, +\infty)$. Množina M omezená grafy $y = \ln x$ a $\ln^2 x$ tedy leží nad intervalem $[1, e]$ a je dána nerovnostmi

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ln^2 x \leq y \leq \ln x,\ 1 \leq x \leq e\}.$$

Obsah je tedy dán integrálem:

$$\int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx. \tag{1}$$

Pomocí per partes spočteme primitivní funkce

$$\int \ln x\ dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x$$
$$\int \ln^2 x\ dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x\ dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x.$$

Dále

$$\int_1^e \ln x\ dx = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1$$
$$\int_1^e \ln^2 x\ dx = (e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e) - (1 \ln^2 1 - 2 \ln 1 + 2) = (e - 2e + 2e) - (2) = e - 2.$$

Určitý integrál je tedy roven:

$$1 - (e - 2) = 3 - e.$$

(2.d) Rovinu můžeme rozložit celkem na tři množiny, a to

$$M_> := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^4 + y^4 > x^2 + y^2\},$$
$$M_< := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^4 + y^4 < x^2 + y^2\},$$
$$M_= := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^4 + y^4 = x^2 + y^2\}.$$

Množina $M_>$ je zřejmě neomezená a našim úkolem je tedy najít obsah $M_<$. Nejprve zkusme přepsat rovnost

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \tag{2}$$

do polárních souřadnic. Rovnost (2) zřejmě platí pro $(0, 0)$. Nyní můžeme předpokládat, že x nebo y je nenulové.

Pišme tedy $x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi$, kde $r > 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi)$. Pak (2) znamená

$$r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2.$$

Jelikož $r \neq 0$, pak máme vztah

$$r^2 \equiv r^2(\varphi) = \frac{1}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi},$$

a tudíž máme r vyjádřeno jako funkci φ. Ze známého vzorečku tedy platí, že obsah $M_<$ je dán integrálem

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\ d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}\ d\varphi = \sqrt{2}\pi. \tag{3}$$

Zde jsme využili znalosti integrálu (1.e) z 1. sady.

(3.d) Povrch koule o poloměru $r > 0$ je rotační plocha, která vznikne rotací grafu funkce

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r]$$

kolem osy x. Platí

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

a tedy dle vzorečku je obsah povrchu koule roven integrálu:

$$\begin{aligned}2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\ dx &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\ dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} r\ dx \\ &= 2\pi[rx]_{-r}^{r} = 2\pi(r^2-(-r^2)) = 4\pi r^2.\end{aligned}$$

(4.c) Evolventa kruhu je dáne vzorcem:

$$x(t) = a(\cos t + t\sin t),\ y(t) = a(\sin t - t\cot t),\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0.$$

Platí tedy

$$x'(t) = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t,\ y'(t) = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Délka evolventy je tedy dáne integrálem

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt = \int_0^{2\pi} at\ dt = a[t^2/2]_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$$

(5.c) Polokoule $x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x > 0$, kde $a > 0$, je rotační těleso omezené nerovnostmi $0 \le x \le a,\ 0 \le \sqrt{y^2+z^2} \le a^2 - x^2$. Homogenní znamená, že objemová hustota $\gamma(x)$ nezávisí na x a rovná se tedy nějakému číslu $\gamma > 0$. S použitím vzorečků spočteme:

$$\begin{aligned}M_{yz} &= \pi \int_0^a \gamma x(a^2-x^2)\ dx = \pi\gamma[x^2a^2/2 - x^4/4]_0^a = \pi\gamma\frac{a^4}{4}, \\ M &= \pi \int_0^a \gamma(a^2-x^2)\ dx = \pi\gamma[xa^2 - x^3/3]_0^a = \pi\gamma(\frac{2a^3}{3}).\end{aligned}$$

Tedy těžiště má souřadnice

$$T = \left[\frac{M_{yz}}{M}, 0, 0\right] = \left[\frac{a^4}{4}\frac{3}{2a^3}, 0, 0\right] = \left[\frac{3a}{8}, 0, 0\right].$$