Řešení DÚ
4. sada

[(2.d)] Vyřešte

$$xy'(x) + y(x) = y^2(x)\ln x,\ y(1) = 1. \tag{1}$$

Rovnice má smysl pro $x > 0$. Vydělíme x a získáme tím rovnici

$$y'(x) + y(x)/x = y^2(x)\ln x/x, \tag{2}$$

která má stejnou množinu řešení. Jedná se o Bernoulliho rovnici s paramatrem $n = 2$. Zavedeme tedy novou funkci $z(x) = y^{1-n}(x) = y^{-1}(x)$. Pak $z'(x) = -y^{-2}(x)y'(x)$. Rovnici (2) vydělíme y^2 a získáme rovnici

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} &= \frac{\ln x}{x}\\ -z' + \frac{z}{x} &= \frac{\ln x}{x}\\ z' - \frac{z}{x} &= -\frac{\ln x}{x}.\end{aligned}$$

Jedná se o lineární rovnici prvního řádu. Dále pro $p(x) = -1/x$ máme $P(x) = \int p(x)\ \mathbf{dx} = -\ln(x)$. Tudíž $e^{P(x)} = \frac{1}{x}$ a

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{x}\right)' &= \frac{1}{x}\left(z' - \frac{z}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x^2}\\ \frac{z}{x} &= -\int \frac{\ln x}{x^2}\ \mathbf{dx} = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\ \mathbf{dx}\\ &= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}\\ z(x) &= \ln x + 1 + cx,\ c \in \mathbb{R},\ x > 0.\end{aligned}$$

Dále

$$y(x) = 1/z(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

je řešení (1) na každém intervalu, který leží v definičním oboru $D_y = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0,\ \ln x + 1 + cx \neq 0\}$.

Řešme[1] tedy $\ln x + 1 + cx = 0$. Je-li $c \geq 0$, pak $f(x) = \ln x + 1 + cx$ je součet dvou rostoucích funkcí, je tedy rostoucí. Dále

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Existuje tedy právě jedno x_0 tak, že $f(x_0) = x$. Explicitně ale toto x_0 v závislosti na c v obecném případě dopočítat neumíme. Je-li $c < 0$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,\ &\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\\ f'(x) = 1/x + c,\ &f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{c},\\ f\left(-\frac{1}{c}\right) = \ln\left(-\frac{1}{c}\right) &+ 1 - \frac{c}{c} = \ln\left(-\frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Tudíž $f(-\frac{1}{c}) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{c} > 1 \Leftrightarrow -1 < c$ (neboť $c < 0$). Tudíž pro $c > -1$ existuje právě jedna dvojice $0 < x_1 < x_2 < +\infty$ tak, že $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pro $c = -1$, platí $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Je-li $c < -1$, pak $f < 0$ na $(0, +\infty)$. Tudíž

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + cx} \text{ na } \begin{cases}(0, x_0) \text{ a na } (x_0, +\infty), & c \geq 0,\\ (0, x_1) \text{ a na } (x_1, x_2) \text{ a na } (x_2, +\infty), & -1 < c < 0,\\ (0, 1) \text{ a na } (1, +\infty), & c = 1,\\ (0, +\infty), & c < -1\end{cases} \tag{3}$$

řeší (1) na daných intervalech. Teď se můžeme vrátit k maximálnímu řešení s počáteční podmínkou $y(1) = 1$.

[1] Tento paragraf není součástí řešení s počáteční podmínkou $y(1) = 1$.

Má-li platit $y(1) = 1$, pak $\ln 1 + 1 + c = 1$, tedy $c = 0$. Platí $\ln x + 1 > 0$ pro $x \in (1/e, +\infty)$ a $\ln x + 1 < 0$ pro $x \in (0, 1/e)$. Jelikož $1 \in (1/e, +\infty)$, pak hledané řešení je

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1},\ x \in (1/e, +\infty). \tag{4}$$

Náčrt grafu funkce (4).