Řešení vybraných příkladů a DÚ
1. sada

(1.e) Nejprve použijeme standardní substituci $y = \tan x$ a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 + \cos^4 x} &= \int \frac{dy}{1+y^2} \frac{1}{\frac{y^4}{(1+y^2)^2} + \frac{1}{(1+y^2)^2}} \\ &= \int \frac{dy}{1+y^2} \frac{(1+y^2)^2}{1+y^4} \\ &= \int \frac{1+y^2}{1+y^4}\, dy.\end{aligned}$$

Dále provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1+y^2}{1+y^4} = \frac{1}{2(y^2+\sqrt{2}y+1)} + \frac{1}{2(y^2-\sqrt{2}y+1)}.$$

Dále

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\, dy &= \int \frac{1}{(y+\sqrt{2}/2)^2+1-1/2}\, dy \\ &= 2\int \frac{1}{(\sqrt{2}(y+\sqrt{2}/2))^2+1}\, dy \quad \Big| u = \sqrt{2}y+1,\ du = \sqrt{2}dy \\ &= \sqrt{2}\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x+1) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

a analogicky

$$\int \frac{1}{y^2-\sqrt{2}y+1}\, dy = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x-1) + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Obě rovnosti pro primitivní funkce platí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Jelikož funkce $\sin^4 x + \cos^4 x$ je π-periodická, pak platí:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4+\cos^4 x} \\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \Big(\arctan(\sqrt{2}\tan x+1) + \arctan(\sqrt{2}\tan x-1)\Big)/\sqrt{2} \\ &- 2\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \Big(\arctan(\sqrt{2}\tan x+1) + \arctan(\sqrt{2}\tan x-1)\Big)/\sqrt{2} \\ &= 2\lim_{y\to+\infty} 2\arctan(y)/\sqrt{2} - 2\lim_{y\to-\infty} 2\arctan(y)/\sqrt{2} \\ &= 2\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(2) Nejprve provedeme rozklad polynomu $\alpha^{2n}-1$ na kořenové činitele. Zde chápeme α jako neznámou v polynomu stupně $2n$. Pro jednoduchost označme primitivní $2n$-tou odmocninu z 1 jako

$$q := e^{\frac{2\pi i}{2n}} = e^{\frac{\pi i}{n}} = \cos(\frac{\pi}{n}) + i\sin(\frac{\pi}{n}).$$

Potom množina $\{q, q^2, \cdots, q^{2n}\}$ jsou všechny $2n$-té odmocniny z 1. Přitom platí $q^{2n} = 1,\ q^n = -1$ a konečně $q^{2n-j} = \bar{q}^j,\ j = 1, \cdots, n-1$. Platí

$$\begin{aligned}
\alpha^{2n} - 1 &= \prod_{j=1}^{2n} (\alpha - q^j) = (\alpha - (-1))(\alpha - 1) \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha - q^j) \prod_{j=n+1}^{2n-1} (\alpha - q^j) \\
&= (\alpha^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \Big((\alpha - q^j)(\alpha - q^{2n-j}) \Big) = (\alpha^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \Big((\alpha - q^j)(\alpha - \bar{q}^j) \Big) \\
&= (\alpha^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \left(\alpha - \left(\cos(\frac{j\pi}{n}) + i \sin(\frac{j\pi}{n}) \right) \right) \left(\alpha - \left(\cos(\frac{j\pi}{n}) - i \sin(\frac{j\pi}{n}) \right) \right) \\
&= (\alpha^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \left(\alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{j\pi}{n}) + 1 \right).
\end{aligned}$$

Dále použijeme definici Riemannova integrálu a můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \ln(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x) dx &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{\pi j}{n})) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{\pi j}{n})) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{j=1}^{n-1} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{\pi j}{n}))(1 + \alpha^2 + 2\alpha) \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln(\frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha + 1)^2}{\alpha^2 - 1}) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln(\frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha + 1)}{\alpha - 1}) \\
&= \pi \lim_{n \to +\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha + 1)}{\alpha - 1}} = \\
&= \begin{cases} \pi \ln(\alpha^2), & |\alpha| > 1 \\ 0, & |\alpha| < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

(3.e) Nechť $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak f je spojitá na $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ a tudíž $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x)dx$ existuje vlatní jako Riemannův i Newtonův. Dále platí

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)\sqrt{1-x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x)\sqrt{x} = 1. \tag{1}$$

To jest $f \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \to 0^+$ a $f \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ pro $x \to 1^-$. Víme, že $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}}$ existuje vlastní. Dále položme $1 - x = y,\ dx = -dy$. Pak vidíme, že i

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_\varepsilon^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^\varepsilon \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

existuje vlastní. Nyní můžeme použít limitní srovnávácí kritérium pro integrály a tedy dle (1) Newtonovy integrály

$$\int_0^\varepsilon f(x)dx, \quad \int_{1-\varepsilon}^1 f(x)dx$$

existují vlastní. To znamená, že Newtonův integrál

$$\int_0^1 f(x)dx$$

existuje vlastní, neboť je součtem tří vlastních integrálů f přes intervaly $(0, \varepsilon), (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ a $(1-\varepsilon, \varepsilon)$.

(3.g) Nechť $\varepsilon > 0$. Pak funkce $f(x) = \frac{\ln \sin x}{x^p}$ je spojitá na $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ a tudíž f má vlastní Riemannův i Newtonův integrál na $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$. Stačí tedy rozhodnout pro která $p \in \mathbb{R}$ existuje vlastní

$$\int_0^\varepsilon f(x)dx. \tag{2}$$

Platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} = 1$$

a tedy (2) konverguje právě tehdy, když konverguje

$$\int_0^\varepsilon \frac{\ln x}{x^p} dx. \tag{3}$$

Pro $p = 1$ platí

$$\int_0^\varepsilon \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}[\ln^2 x]_0^\varepsilon = -\infty.$$

Pro $p \neq 1$ budeme integrovat per partes a dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_0^\varepsilon x^{-p} \ln x \; dx &= \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p} \ln x\right]_0^\varepsilon - \int_0^\varepsilon \frac{x^{-p+1}}{(1-p)x} dx \\
&= \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \ln x\right]_0^\varepsilon + \frac{1}{p-1} \int_0^\varepsilon x^{-p} \; dx \\
&= \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \ln x\right]_0^\varepsilon + \frac{1}{(p-1)(1-p)} \left[x^{-p+1}\right]_0^\varepsilon \\
&= \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \ln x\right]_0^\varepsilon - \frac{1}{(1-p)^2} \left[x^{1-p}\right]_0^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-p} = \begin{cases} 0 & , \; 1-p > 0, \\ +\infty & , \; 1-p < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-p} \ln x = \begin{cases} 0 & , \; 1-p > 0, \\ -\infty & , \; 1-p < 0, \end{cases}$$

pak nutně

$$\int_0^\varepsilon x^{-p} \ln x \; dx = \begin{cases} \in \mathbb{R} & , \; 1 > p \\ -\infty & , \; 1 < p. \end{cases}$$

Integrál konverguje právě tehdy, když $p < 1$.

(3.h) Označme $f(x) = \frac{\arctan x}{x^{3/2}}$. Podobně jako v 3.e) stačí rozhodnout, zda konvergují integrály f přes $(0, \varepsilon)$ a $(K, +\infty)$, kde $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ si libovolně ale pevně zvolíme. Platí

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)x^{3/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož víme, že

$$\int_0^\varepsilon x^{-1/2} dx, \; \int_K^{+\infty} x^{-3/2}$$

existují vlastní, pak z limitního srovnávacího kritéria pro integrály plyne, že existují vlastní integrály

$$\int_0^\varepsilon f(x) \; dx, \; \int_K^{+\infty} f(x) \; dx.$$

Tudíž existuje vlastní i $\int_0^{+\infty} f(x) \; dx$.