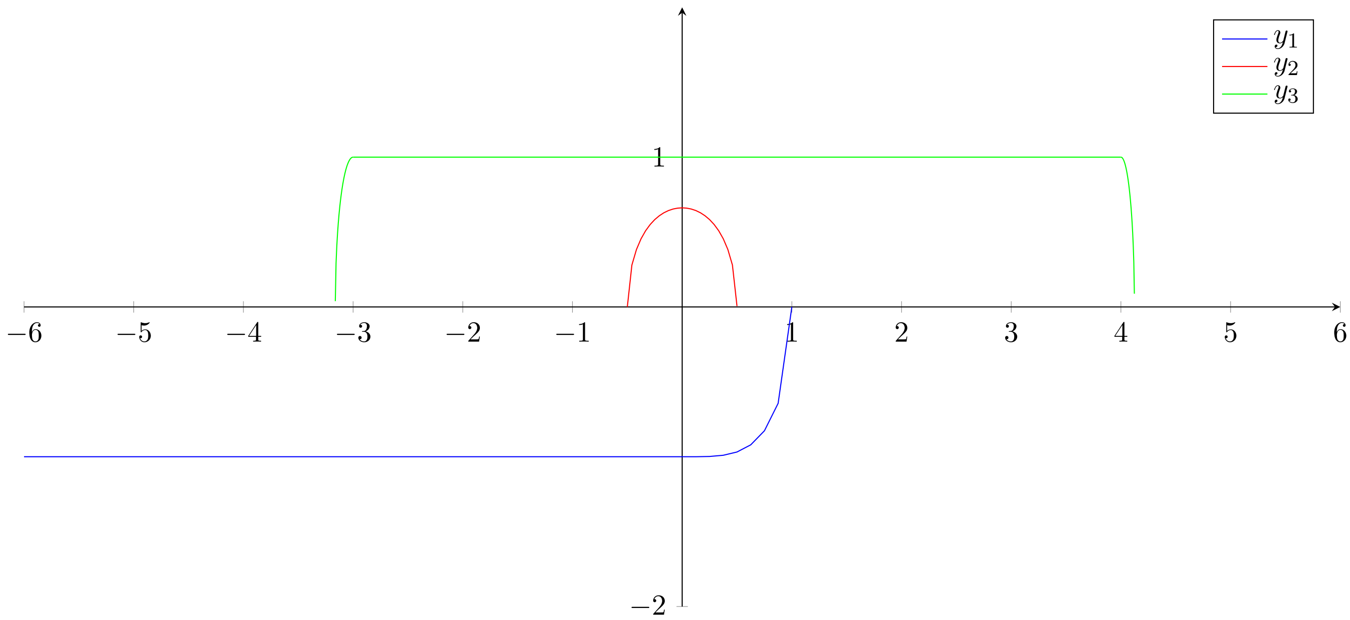
Řešení dú
3. sada

[(1.g)] Vyřešte
$$y'(x) = -\frac{2x}{y}\sqrt{1-y^2}.$$

(1) Pro $f(x) = 2x,\ g(y) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ platí $D_f = \mathbb{R},\ D_g = [-1,1] \setminus \{0\}$.
(2) $M = \{y:\ g(y) = 0\} = \{\pm 1\}$. Stacionární řešení jsou $y(x) = \pm 1$.
(3) $I = D_f = \mathbb{R},\ D_g \setminus M = J_1 \cup J_2$, kde $J_1 = (-1,0),\ J_2 = (0,1)$.
(4) Zvolme $I = \mathbb{R}$ a $J = J_1$. Pak na J_1 máme
$$G(y) = \int \frac{\mathbf{dy}}{g(y)} = -\int \frac{y\,\mathbf{dy}}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2}.$$
Na I pak platí
$$F(x) + c = \int f(x)\mathbf{dx} = \int 2x\,\mathbf{dx} = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
(5) $G : J \to (0,1)$ je klesající s inverzní funkcí $G^{-1} : (0,1) \to J,\ G^{-1}(u) = -\sqrt{1-u^2}$.
(6) Pak
$$y(x) = G^{-1}(F(x)+c) = -\sqrt{1-(x^2+c)^2} = -\sqrt{1-x^4-2cx^2-c^2}$$
řeší diferenciální rovnici na
$$\begin{aligned} D_c := \{x \in I:\ F(x) + c \in D_{G^{-1}} = G(J) = (0,1)\},\\ F(x) + c \in (0,1) \Leftrightarrow x^2 + c \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < x^2 + c < 1\\ \Leftrightarrow -c < x^2 < 1 - c. \end{aligned}$$
Vidíme, že $D_c = \emptyset$ pro $c \geq 1$. Stačí tedy uvažovat $c < 1$, pak máme
$$D_c = \begin{cases} (-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}), & 0 < c < 1,\\ (-\sqrt{1-c}, -\sqrt{-c}) \cup (\sqrt{-c}, \sqrt{1-c}), & c \leq 0. \end{cases}$$
(7) Maximální řešení ležící v dolní polorovině jsou tvaru
$$\begin{aligned}
&y(x) = -1,\ x \in \mathbb{R},\\
&y(x) = -\sqrt{1-(x^2+c)^2},\ x \in (-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}),\ 0 < c < 1,\\
&y(x) = \begin{cases} -1, & x \leq \sqrt{-c},\\ -\sqrt{1-(x^2+c)^2}, & x \in (\sqrt{-c}, \sqrt{1-c}),\ c \leq 0, \end{cases}\\
&y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-(x^2+c)^2}, & x \in (-\sqrt{1-c}, -\sqrt{-c}),\ c \leq 0,\\ -1, & x \geq -\sqrt{-c}, \end{cases}\\
&y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-(x^2+c_1)^2}, & x \in (-\sqrt{1-c_1}, -\sqrt{-c_1}),\ c_1 \leq 0,\\ -1, & x \in [-\sqrt{-c_1}, \sqrt{-c_2}],\\ -\sqrt{1-(x^2+c_2)^2}, & x \in (\sqrt{-c_2}, \sqrt{1-c_2}),\ c_2 \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$
(8) Jestliže zvolíme $J = J_2$, pak se změní jen předpis pro $G^{-1} : J \to J,\ G^{-1}(u) = \sqrt{1-u^2}$, zatímco ostatní výpočty zůstanou beze změny. Odsud pak plyne, že maximální řešení v horní polorovině jsou rovny $-y(x)$, kde $y(x)$ je maximální řešení v dolní polorovině.
(9) Závěr: Větvící body rovnice jsou právě ty body, které leží na přímkách $y = \pm 1$. Body uvnitř pásů $y \in (-1,0)$ a $y \in (0,1)$ sice může procházet nekonečně mnoho maximálních řešení (umíte si rozmyslet, které to jsou?), ale nejedná se o větvící body.

Ukázky vybraných maximálních řešení



$$y_1 = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ -\sqrt{1-x^4}, & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$y_2 = \sqrt{1-(x^2+3/4)^2},\ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$y_3 = \begin{cases} \sqrt{(1-(x^2-9)^2}, & x \in (-\sqrt{10}, -3) \\ 1, & x \in [-3, 4] \\ \sqrt{(1-(x^2-16)^2}, & x \in (4, \sqrt{17}) \end{cases}$$